



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE
ANCIENNE & MODERNE

EMILE BLANCHARD

19, Rue de la Sorbonne, PARIS

SUGGERA

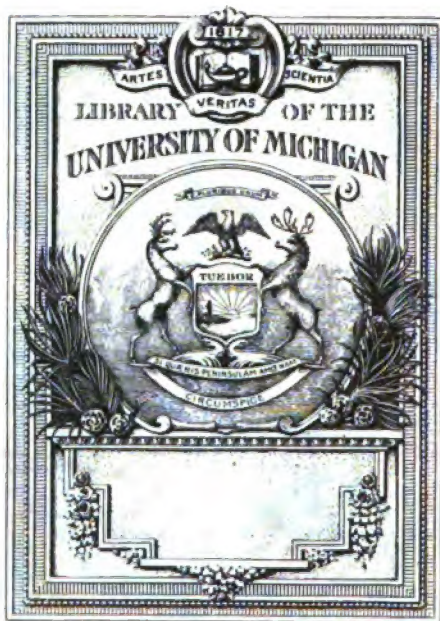
de la Sorbonne

CHAT, ÉCHANGE

NEUFS & D'OCCASION

COMMISSION

NTATION - RELIURE





QA
35
A9

~~6-10-1~~

TRAITÉ COMPLÉT DE TRIGONOMÉTRIE.

Contenant les Principes, la Construction & l'Usage des Tables des SINUS, des TANGENTES & des LOGARITHMES : la TRIGONOMÉTRIE-RECTILIGNE avec son application au mesurage des distances inaccessibles, au Toisé, à l'Arpentage & aux Fortifications : & la TRIGONOMÉTRIE-SPHÉRIQUE, avec la manière de s'en servir pour résoudre tous les problèmes de l'Astronomie & de la Géographie qui en dépendent.

Ouvrage nécessaire aux jeunes Gens qui font leur cours de Philosophie, & à toutes les personnes qui se destinent au Toisé, à l'Arpentage, à l'Architecture, au Génie, à la Marine, à l'Astronomie, &c.

Par M. ^{Jacques} AUDIERNE.



A P A R I S,

Chez CLAUDE HERISSANT, rue Neuve Notre-Dame,
à la Croix d'or & aux trois Vertus.

M. DCC. LVI.

Avec Approbation & Privilège du Roi.



A MONSIEUR
DE SALABERRY

Président de la Chambre des Comptes.

MONSIEUR,

Un Auteur ambitieux ou intéressé cherche dans une Dédicace, souvent plus flatteuse que sincère, la protection d'un Mécène fameux par son crédit ou par son luxe. Un Philosophe de mauvaise humeur, que son orgueil, peut-être justement humilié, a dégoûté du commerce des Grands, & que son amour propre établit au dessus du reste des hommes, appelle sagesse l'indifférence qu'il a pour les uns, & grandeur d'âme le mépris qu'il conçoit pour les autres. Pour moi, Géometre assez Philosophe pour ne pas ramper, mais trop citoyen pour affecter l'indépendance; ce n'est, MONSIEUR, ni à vos titres, ni à votre dignité, ni à votre crédit, ni à votre fortune, que j'offre ce foible fruit de mes veilles. C'est à vous, MONSIEUR, que je le présente; à vous dont le suffrage me sera le plus flatteur; & de qui je me ferai toujours honneur d'être autant par sentiment que par devoir,

MONSIEUR,

Le très-humble & très-obéissant
serviteur, AUDIERNE.

*EXPLICATION des Signes dont on se sert
dans ce Traité.*

Pour ne point couper le discours par les Citations , nous nous sommes servi de quelques expressions abrégées qui signifient : sçavoir....

[E] *Par le Livre & par la Proposition d'Euclide que l'on indique à la marge.*

[N] *Par le Numero de ce Traité indiqué à la marge.*

[N§] *Par la Note du Numero de ce Traité indiqué à la marge.*

[H] *Par l'hypothèse.*

[C] *Par la Construction.*

[D] *Par ce qui vient d'être démontré dans la même Proposition dont il s'agit.*

T A B L E S
C I T É E S
D A N S C E T R A I T É .

TABLES des Sinus, des Tangentes,
0. Degré.

24

Mi- nu- tes.	Sinus.	Tangen- tes.	Logarithmes des Sinus.	Logarithmes des Tangent.
0.	0.	0.	0.	0.
1.	29.09.	29.09.	6. 4637261.	6. 4637261.
2.	58. 18.	58. 18.	6. 7647561.	6. 7647562.
3.	87. 27.	85. 27.	6. 9408473.	6. 9408475.
4.	116. 36.	116. 36.	7. 0657860.	7. 0657863.
5.	145. 44.	145. 44.	7. 1626960.	7. 1626964.
6.	174. 53.	174. 53.	7. 2418771.	7. 2418778.
7.	203. 62.	203. 62.	7. 3088239.	7. 3088248.
8.	232. 71.	232. 71.	7. 3668157.	7. 3668169.
9.	261. 80.	261. 80.	7. 4179681.	7. 4179696.
10.	290. 89.	290. 89.	7. 4637255.	7. 4637273.
11.	319. 98.	319. 98.	7. 5051181.	7. 5051203.
12.	349. 06.	349. 07.	7. 5429065.	7. 5429091.
13.	378. 15.	378. 16.	7. 5776684.	7. 5776715.
14.	407. 24.	407. 25.	7. 7098530.	7. 6098566.
15.	436. 33.	436. 33.	7. 6398160.	7. 6398201.
16.	465. 42.	465. 42.	7. 6678445.	7. 6678492.
17.	494. 51.	494. 51.	7. 6941733.	7. 6941786.
18.	523. 60.	523. 60.	7. 7189966.	7. 7190026.
19.	552. 68.	552. 69.	7. 7424775.	7. 7424841.
20.	581. 77.	581. 78.	7. 7647537.	7. 7647610.
21.	610. 86.	610. 87.	7. 7859427.	7. 7859508.
22.	639. 95.	639. 96.	7. 8061458.	7. 8061547.
23.	669. 04.	669. 05.	7. 8254507.	7. 8254604.
24.	698. 13.	698. 14.	7. 8439338.	7. 8439444.
25.	727. 21.	727. 23.	7. 8616623.	7. 8616738.
26.	756. 30.	756. 32.	7. 8786953.	7. 8787077.
27.	785. 39.	785. 41.	7. 8950864.	7. 8950988.
28.	814. 48.	814. 50.	7. 9108793.	7. 9108938.
29.	843. 57.	843. 60.	7. 9261190.	7. 9261344.
30.	872. 65.	872. 69.	7. 9408419.	7. 9408584.

& des Logarithmes des Sinus & des Tangentes.

89 Degrés.

Mi- nutes.	Sinus.	Tangentes.	Logarithmes des Sinus.	Logarithmes des Tangentes
60.	100000.00.	Infini.	10. 0000000.	Infini.
59.	99999.99.	3437746.67.	9. 9999999.	13. 3362739.
58.	99999.98.	1718873.19.	9. 9999999.	13. 2352438.
57.	99999.96.	145915.30.	9. 9999998.	13. 0591525.
56.	99999.93.	859436.30.	9. 9999997.	12. 9342237.
55.	99999.89.	68748.87.	9. 9999995.	12. 8173036.
54.	99999.85.	572957.21.	9. 9999993.	12. 7581222.
53.	99999.79.	491106.00.	9. 9999991.	12. 6911752.
52.	99999.73.	429717.57.	9. 9999988.	12. 6331831.
51.	99999.66.	381970.99.	9. 9999985.	12. 5800304.
50.	99999.58.	341773.71.	9. 9999982.	12. 5362727.
49.	99999.49.	311525.37.	9. 9999978.	12. 4945798.
48.	99999.39.	286477.73.	9. 9999974.	12. 4570909.
47.	99999.28.	264440.80.	9. 9999969.	12. 4225285.
46.	99999.17.	245551.98.	9. 9999964.	12. 3901434.
45.	99999.05.	229181.66.	9. 9999959.	12. 3601799.
44.	99998.92.	214857.62.	9. 9999953.	12. 3321508.
43.	99998.78.	202218.75.	9. 9999947.	12. 3058214.
42.	99998.63.	190984.15.	9. 9999940.	12. 2809974.
41.	99998.47.	180932.20.	9. 9999934.	12. 2575159.
40.	99998.37.	171885.40.	9. 9999927.	12. 2352190.
39.	99998.13.	16.700.19.	9. 9999919.	12. 2140492.
38.	99997.95.	156259.08.	9. 9999911.	12. 1938453.
37.	99997.76.	149465.01.	9. 9999901.	12. 1745396.
36.	99997.56.	143237.12.	9. 9999894.	12. 1560556.
35.	99997.36.	137507.45.	9. 9999885.	12. 1383262.
34.	99997.14.	132218.51.	9. 9999876.	12. 1211923.
33.	99996.92.	127321.34.	9. 9999866.	12. 1049012.
32.	99996.68.	122773.56.	9. 9999856.	12. 0891062.
31.	99996.44.	118540.18.	9. 9999845.	12. 0738656.
30.	99996.19.	114588.65.	9. 9999835.	12. 0591416.

TABLES des Sinus, des Tangentes,
o. Degré.

Mi- nu- tes.	Sinus.	Tangen- tes.	Logarithmes des Sinus.	Logarithmes des Tangent.
0.	0.	0.	0.	0.
1.	29.09.	29.09.	6. 4637261.	6. 4637261.
2.	58.18.	58.18.	6. 7647561.	6. 7647562.
3.	87.27.	85.27.	6. 9408473.	6. 9408475.
4.	116.36.	116.36.	7. 0657860.	7. 0657863.
5.	145.44.	145.44.	7. 1626960.	7. 1626964.
6.	174.53.	174.53.	7. 2418771.	7. 2418778.
7.	203.62.	203.62.	7. 3088239.	7. 3088248.
8.	232.71.	232.71.	7. 3668157.	7. 3668169.
9.	261.80.	261.80.	7. 4179681.	7. 4179696.
10.	290.89.	290.89.	7. 4637255.	7. 4637273.
11.	319.98.	319.98.	7. 5051181.	7. 5051203.
12.	349.06.	349.07.	7. 5429065.	7. 5429091.
13.	378.15.	378.16.	7. 5776684.	7. 5776715.
14.	407.24.	407.25.	7. 6098530.	7. 6098564.
15.	436.33.	436.33.	7. 6398160.	7. 6398201.
16.	465.42.	465.42.	7. 6678445.	7. 6678492.
17.	494.51.	494.51.	7. 6941733.	7. 6941786.
18.	523.60.	523.60.	7. 7189966.	7. 7190026.
19.	552.68.	552.69.	7. 7424775.	7. 7424841.
20.	581.77.	581.78.	7. 7647517.	7. 7647610.
21.	610.86.	610.87.	7. 7859427.	7. 7859508.
22.	639.95.	639.96.	7. 8061458.	7. 8061547.
23.	669.04.	669.05.	7. 8254507.	7. 8254604.
24.	698.13.	698.14.	7. 8439338.	7. 8439444.
25.	727.21.	727.23.	7. 8616623.	7. 8616738.
26.	756.30.	756.32.	7. 8786953.	7. 8787077.
27.	785.39.	785.41.	7. 8950864.	7. 8950988.
28.	814.48.	814.50.	7. 9108793.	7. 9108938.
29.	843.57.	843.60.	7. 9261190.	7. 9261344.
30.	872.65.	872.69.	7. 9408419.	7. 9408584.

& des Logarithmes des Sinus & des Tangentes.
89 Degrés.

ME- S- DE.	Sinus.	Tangentes.	Logarithmes. des Sinus.	Logarithmes des Tangentes
60.	100000.00.	<i>Infinie.</i>	10. 0000000.	<i>infin.</i>
59.	99999.99.	3437746.67.	9. 9999999.	13. 5362739.
58.	99999.98.	1728873.19.	9. 9999999.	13. 2352438.
57.	99999.96.	1145915.30.	9. 9999998.	13. 0591525.
56.	99999.93.	859416.30.	9. 9999997.	12. 9342137.
55.	99999.89.	68748.87.	9. 9999995.	12. 8473036.
54.	99999.85.	572957.21.	9. 9999993.	12. 7581222.
53.	99999.79.	491106.00.	9. 9999991.	12. 6911752.
52.	99999.73.	429717.57.	9. 9999988.	12. 6331831.
51.	99999.66.	381970.99.	9. 9999985.	12. 5800304.
50.	99999.58.	343773.71.	9. 9999982.	12. 5352727.
49.	99999.49.	311521.37.	9. 9999978.	12. 4948798.
48.	99999.39.	286477.73.	9. 9999974.	12. 4570709.
47.	99999.28.	264440.80.	9. 9999969.	12. 4213285.
46.	99999.17.	245551.98.	9. 9999964.	12. 3901434.
45.	99999.05.	229181.66.	9. 9999959.	12. 3601799.
44.	99998.92.	214857.62.	9. 9999953.	12. 3315508.
43.	99998.78.	202218.75.	9. 9999947.	12. 3058214.
42.	99998.63.	190984.19.	9. 9999940.	12. 2809974.
41.	99998.47.	180932.20.	9. 9999934.	12. 2575159.
40.	99998.37.	171885.40.	9. 9999927.	12. 2352190.
39.	99998.13.	163700.19.	9. 9999919.	12. 2140492.
38.	99997.95.	156259.68.	9. 9999911.	12. 1938453.
37.	99997.76.	149465.01.	9. 9999903.	12. 1745396.
36.	99997.56.	143237.12.	9. 9999894.	12. 1560556.
35.	99997.36.	137507.45.	9. 9999885.	12. 1381262.
34.	99997.14.	132218.51.	9. 9999876.	12. 1212923.
33.	99996.92.	127321.34.	9. 9999866.	12. 1049012.
32.	99996.68.	122773.56.	9. 9999856.	12. 0891062.
31.	99996.44.	118540.18.	9. 9999845.	12. 0738654.
30.	99996.19.	114588.65.	9. 9999835.	12. 0591416.

T A B L E DES LOGARITHMES.

Nombre naturel.	Logarithm.	Nombre naturel.	Logarithm.	Nombre naturel.	Logarithm.
1.	0. 0000000.	35.	1. 5440680.	68.	1. 8325087.
2.	0. 3010300.	36.	1. 5563025.	69.	1. 8388491.
3.	0. 4771213.	37.	1. 5682017.	70.	1. 8450980.
4.	0. 6020600.	38.	1. 5797836.	71.	1. 8512583.
5.	0. 6989700.	39.	1. 5910646.	72.	1. 8573325.
6.	0. 7781513.	40.	1. 6020600.	73.	1. 8633129.
7.	0. 8450980.	41.	1. 6127839.	74.	1. 8692317.
8.	0. 9030900.	42.	1. 6232493.	75.	1. 8750613.
9.	0. 9542425.	43.	1. 6334685.	76.	1. 8808136.
10.	1. 0000000.	44.	1. 6434527.	77.	1. 8864907.
11.	1. 0413927.	45.	1. 6532125.	78.	1. 8920946.
12.	1. 0791812.	46.	1. 6627578.	79.	1. 8976171.
13.	1. 1139434.	47.	1. 6720979.	80.	1. 9030900.
14.	1. 1461280.	48.	1. 6812412.	81.	1. 9084850.
15.	1. 1760913.	49.	1. 6901961.	82.	1. 9138139.
16.	1. 2041200.	50.	1. 6989700.	83.	1. 9190781.
17.	1. 2304489.	51.	1. 7075702.	84.	1. 9242793.
18.	1. 2551275.	52.	1. 7160033.	85.	1. 9294189.
19.	1. 2787536.	53.	1. 7242759.	86.	1. 9344984.
20.	1. 3010300.	54.	1. 7323938.	87.	1. 9395193.
21.	1. 3222193.	55.	1. 7403627.	88.	1. 9444827.
22.	1. 3424227.	56.	1. 7481880.	89.	1. 9493900.
23.	1. 3617278.	57.	1. 7558749.	90.	1. 9542425.
24.	1. 3802112.	58.	1. 7634280.	91.	1. 9590414.
25.	1. 3979400.	59.	1. 7708520.	92.	1. 9637878.
26.	1. 4149731.	60.	1. 7781513.	93.	1. 9684829.
27.	1. 4313618.	61.	1. 7853298.	94.	1. 9731279.
28.	1. 4471580.	62.	1. 7923917.	95.	1. 9777236.
29.	1. 4613980.	63.	1. 7993405.	96.	1. 9822712.
30.	1. 4771213.	64.	1. 8061800.	97.	1. 9867717.
31.	1. 4913617.	65.	1. 8129134.	98.	1. 9912261.
32.	1. 5051500.	66.	1. 8195439.	99.	1. 9956352.
33.	1. 5185139.	67.	1. 8260748.	100.	2. 0000000.
34.	1. 5314789.				

TABLE DES LOGARITHMES.

Nombre naturel.	Logarithm.	Nombre naturel.	Logarithm.	Nombre naturel.	Logarithm.
101.	2. 0043274.	155.	2. 1303338.	168.	2. 2255093
102.	2. 0086002.	156.	2. 1335389.	169.	2. 2278868
103.	2. 0128372.	157.	2. 1367206.	170.	2. 2304489
104.	2. 0170333.	158.	2. 1398791.	171.	2. 2329961
105.	2. 0211893.	159.	2. 1430148.	172.	2. 2355284
106.	2. 0253059.	160.	2. 1461280.	173.	2. 2380461
107.	2. 0293838.	161.	2. 1492191.	174.	2. 2405492
108.	2. 0334238.	162.	2. 1522883.	175.	2. 2430380
109.	2. 0374265.	163.	2. 1553360.	176.	2. 2455127
110.	2. 0413927.	164.	2. 1583625.	177.	2. 2479731
111.	2. 0453230.	165.	2. 1613680.	178.	2. 2504200
112.	2. 0492180.	166.	2. 1643529.	179.	2. 2528530
113.	2. 0530784.	167.	2. 1673173.	180.	2. 2552725
114.	2. 0569049.	168.	2. 1702617.	181.	2. 2576786
115.	2. 0606978.	169.	2. 1731863.	182.	2. 2600714
116.	2. 0644580.	170.	2. 1760913.	183.	2. 2624511
117.	2. 0681852.	171.	2. 1789769.	184.	2. 2648178
118.	2. 0718820.	172.	2. 1818436.	185.	2. 2671715
119.	2. 0755470.	173.	2. 1846914.	186.	2. 2695125
120.	2. 0791812.	174.	2. 1875207.	187.	2. 2718410
121.	2. 0827854.	175.	2. 1903317.	188.	2. 2741571
122.	2. 0863598.	176.	2. 1931246.	189.	2. 2764602
123.	2. 0899051.	177.	2. 1958997.	190.	2. 2787523
124.	2. 0934217.	178.	2. 1986571.	191.	2. 2810334
125.	2. 0969100.	179.	2. 2013971.	192.	2. 2833031
126.	2. 1003705.	180.	2. 2041200.	193.	2. 2855557
127.	2. 1038037.	181.	2. 2068259.	194.	2. 2878005
128.	2. 1072100.	182.	2. 2095150.	195.	2. 2900344
129.	2. 1105897.	183.	2. 2121876.	196.	2. 2922566
130.	2. 1139434.	184.	2. 2148438.	197.	2. 2944666
131.	2. 1172713.	185.	2. 2174839.	198.	2. 2966655
132.	2. 1205739.	186.	2. 2201081.	199.	2. 2988733
133.	2. 1238516.	187.	2. 2227165.	200.	2. 3010300
134.	2. 1271048.				

Table des Opérations que l'on a faites pour trouver le Logarithme d'un nombre 2. [Les lettres A, B, C, &c. indiquent l'ordre des Opérations.]

	Nomb. nat.	Logarithmes.		Nomb. nat.	Logarithmes.
A.	1.	0.00000000	O.	109999785	b. 30102539.
B.	3. ¹⁶¹¹⁷⁷⁶ 10000000	0.50000000	Q.	2. 0002595	0. 30108642.
C.	10.	1.00000000	P.	3. 0005407	0. 30114746
D.	1.	0.00000000	Q.	1. 9999785	q. 30102539.
E.	1. 7782793	0. 25000000	R.	2. 0001189	0. 30105590.
F.	1. 1622776	0. 50000000	P.	3. 0002595	0. 30108642.
G.	1. 7782793	0. 25000000	Q.	1. 9999785	q. 30102539.
H.	1. 3713736	0. 37500000	R.	2. 0001189	0. 30105590.
I.	1. 8622776	0. 50000000	S.	3. 0002595	0. 30108642.
J.	1. 7782793	0. 25000000	O.	1. 9999785	b. 30102539.
K.	2. 0535249	0. 31250000	S.	2. 0001189	0. 30105590.
L.	2. 3713736	0. 37500000	R.	3. 0002595	0. 30108642.
M.	1. 7782793	0. 25000000	T.	1. 9999785	b. 30102539.
N.	1. 9109528	0. 28125000	S.	2. 0001189	0. 30105590.
O.	2. 0535249	0. 31250000	O.	1. 9999785	b. 30102539.
P.	1. 9109528	0. 28125000	V.	1. 9999959	0. 30102920.
Q.	1. 9809566	0. 29687500	X.	2. 0000046	0. 30103110.
R.	2. 0535249	0. 31250000	T.	1. 9999959	0. 30102920.
S.	1. 9809566	0. 29687500	V.	2. 0000046	0. 30103110.
T.	2. 0169144	0. 30468750	Y.	1. 9999959	0. 30102920.
U.	2. 0535249	0. 31250000	X.	2. 0000046	0. 30103110.
V.	1. 9809566	0. 29687500	V.	1. 9999959	0. 30102920.
W.	1. 9988546	0. 30078125	Z.	1. 9999980	0. 30102967.
X.	2. 0078641	0. 30273437	Y.	2. 0000002	0. 30103015.
Y.	2. 0169144	0. 30468750	Z.	1. 9999980	0. 30102967.
Z.	1. 9988546	0. 30078125	AA.	1. 9999990	0. 30102991.
AA.	2. 0078641	0. 30273437	BB.	2. 0000002	0. 30103015.
AB.	2. 0169144	0. 30468750	CC.	1. 9999990	0. 30102991.
AC.	1. 9988546	0. 30078125	DD.	1. 9999999	0. 30103015.
AD.	2. 0033542	0. 30175781	EE.	1. 9999999	0. 30103015.
AE.	2. 0078641	0. 30273437	FF.	2. 0000002	0. 30103015.
AF.	1. 9988546	0. 30078125	GG.	1. 9999999	0. 30103015.
AG.	2. 0011031	0. 30126953	HH.	1. 9999999	0. 30103015.
AH.	2. 0033542	0. 30175781	II.	1. 9999999	0. 30103015.
AI.	1. 9988546	0. 30078125	JJ.	1. 9999999	0. 30103015.
AJ.	1. 9999785	0. 30102539	KK.	1. 9999999	0. 30103015.
AK.	2. 0011031	0. 30126953	LL.	1. 9999999	0. 30103015.
AL.	1. 9999785	0. 30102539	MM.	1. 9999999	0. 30103015.
AM.	2. 0005407	0. 30114746	NN.	1. 9999999	0. 30103015.
AN.	2. 0011031	0. 30126953	OO.	1. 9999999	0. 30103015.
AO.			PP.	1. 9999999	0. 30103015.
AP.			QQ.	1. 9999999	0. 30103015.
AQ.			RR.	1. 9999999	0. 30103015.
AR.			SS.	1. 9999999	0. 30103015.
AS.			TT.	1. 9999999	0. 30103015.
AT.			UU.	1. 9999999	0. 30103015.
AV.			VV.	1. 9999999	0. 30103015.
AW.			WW.	1. 9999999	0. 30103015.
AX.			XX.	1. 9999999	0. 30103015.
AY.			YY.	1. 9999999	0. 30103015.
AZ.			ZZ.	1. 9999999	0. 30103015.

T A B L E

Des Nombres Premiers compris entre 1. & 1800.

1.	173.	409.	659.	941.	1223.	1511.
2.	179.	419.	661.	947.	1229.	1523.
3.	181.	421.	673.	953.	1231.	1531.
5.	191.	431.	677.	967.	1237.	1543.
7.	193.	433.	683.	971.	1249.	1549.
<hr/>						
11.	197.	439.	691.	977.	1259.	1553.
13.	199.	443.	701.	983.	1277.	1559.
17.	211.	449.	709.	991.	1279.	1567.
19.	223.	457.	719.	997.	1283.	1571.
23.	227.	461.	727.	1009.	1289.	1579.
<hr/>						
29.	229.	463.	733.	1013.	1291.	1583.
31.	233.	467.	739.	1019.	1297.	1597.
37.	239.	479.	743.	1021.	1301.	1601.
41.	241.	487.	751.	1031.	1303.	1607.
43.	251.	491.	757.	1033.	1307.	1609.
<hr/>						
47.	257.	499.	761.	1039.	1319.	1613.
53.	263.	503.	769.	1049.	1321.	1619.
59.	269.	509.	773.	1051.	1327.	1621.
61.	271.	521.	787.	1061.	1361.	1627.
67.	277.	523.	797.	1063.	1367.	1637.
<hr/>						
71.	281.	541.	809.	1069.	1373.	1657.
73.	283.	547.	811.	1087.	1381.	1663.
79.	293.	557.	821.	1091.	1399.	1667.
83.	307.	563.	823.	1093.	1409.	1669.
89.	311.	569.	827.	1097.	1413.	1693.
<hr/>						
97.	313.	571.	829.	1103.	1417.	1697.
101.	317.	577.	839.	1109.	1429.	1699.
103.	331.	587.	853.	1117.	1433.	1709.
107.	337.	593.	857.	1123.	1439.	1721.
109.	347.	599.	859.	1129.	1447.	1723.
<hr/>						
113.	349.	601.	863.	1151.	1451.	1733.
117.	353.	607.	877.	1153.	1453.	1741.
131.	359.	613.	881.	1163.	1459.	1747.
137.	367.	617.	883.	1171.	1471.	1753.
139.	373.	619.	887.	1181.	1481.	1759.
<hr/>						
149.	379.	631.	907.	1187.	1483.	1777.
151.	383.	641.	911.	1193.	1487.	1783.
157.	389.	643.	919.	1201.	1489.	1787.
163.	397.	647.	929.	1213.	1493.	1789.
167.	401.	653.	937.	1217.	1499.	1801.

Table des Opérations que l'on a faites pour trouver le Logarithme d'un nombre 2. [Les lettres A, B, C, &c. indiquent l'ordre des Opérations.]

	Nomb. nat.	Logarithmes.		Nomb. nat.	Logarithmes.
A.	1.	0.00000000.	P.	109999785.	0.30102539.
B.	3.1622776.	0.50000000.	Q.	2.0002595.	0.30108642.
C.	10.	0.00000000.	R.	3.0005407.	0.30114746.
D.	1.	0.00000000.	S.	1.9999785.	0.30102539.
E.	1.7782793.	0.25000000.	T.	2.0001889.	0.30105790.
F.	1.1622776.	0.20000000.	U.	3.0002595.	0.30108642.
G.	1.7782793.	0.25000000.	V.	1.9999785.	0.30102539.
H.	3.713736.	0.57500000.	W.	2.0004486.	0.30104064.
I.	1.622776.	0.20000000.	X.	3.0001889.	0.30105790.
J.	2.7782793.	0.45000000.	Y.	1.9999785.	0.30102539.
K.	2.0535249.	0.31250000.	Z.	2.0004486.	0.30104064.
L.	3.713736.	0.57500000.	AA.	1.9999785.	0.30102539.
M.	1.7782793.	0.25000000.	AB.	1.9999999.	0.30102920.
N.	1.9109528.	0.28125000.	BB.	1.9999999.	0.30103110.
	2.0535249.	0.31250000.	CC.	1.9999999.	0.30103301.
	1.9109528.	0.28125000.	DD.	1.9999999.	0.30103492.
	1.9809566.	0.29687500.	EE.	1.9999999.	0.30103683.
	2.0169144.	0.30468750.	FF.	1.9999999.	0.30103874.
	2.0535249.	0.31250000.	GG.	1.9999999.	0.30104064.
	1.9809566.	0.29687500.	HH.	1.9999999.	0.30104255.
	1.9988546.	0.30078125.	II.	1.9999999.	0.30104446.
	2.0169144.	0.30468750.	JJ.	1.9999999.	0.30104637.
	1.9988546.	0.30078125.	KK.	1.9999999.	0.30104828.
	2.0078641.	0.30273437.	LL.	1.9999999.	0.30105019.
	2.0169144.	0.30468750.	MM.	1.9999999.	0.30105210.
	1.9988546.	0.30078125.	NN.	1.9999999.	0.30105401.
	2.0033542.	0.30175781.	OO.	1.9999999.	0.30105592.
	2.0078641.	0.30273437.	PP.	1.9999999.	0.30105783.
	1.9988546.	0.30078125.	QQ.	1.9999999.	0.30105974.
	2.0011031.	0.30126953.	RR.	1.9999999.	0.30106165.
	2.0033542.	0.30175781.	SS.	1.9999999.	0.30106356.
	1.9988546.	0.30078125.	TT.	1.9999999.	0.30106547.
	1.9999785.	0.30102539.	UU.	1.9999999.	0.30106738.
	2.0011031.	0.30126953.	VV.	1.9999999.	0.30106929.
	1.9999785.	0.30102539.	WW.	1.9999999.	0.30107120.
	2.0005407.	0.30114746.	XX.	1.9999999.	0.30107311.
	2.0011031.	0.30126953.	YY.	1.9999999.	0.30107502.

T A B L E

Des Nombres Premiers compris entre 1. & 1800.

1.	173.	409.	659.	941.	1223.	1511.
2.	179.	419.	661.	947.	1229.	1523.
3.	181.	421.	673.	953.	1231.	1531.
5.	191.	431.	677.	967.	1237.	1543.
7.	193.	433.	683.	971.	1249.	1549.
11.	197.	439.	691.	977.	1259.	1553.
13.	199.	443.	701.	983.	1277.	1559.
17.	211.	449.	709.	991.	1279.	1567.
19.	223.	457.	719.	997.	1283.	1571.
23.	227.	461.	727.	1009.	1289.	1579.
29.	229.	463.	733.	1013.	1291.	1583.
31.	233.	467.	739.	1019.	1297.	1597.
37.	239.	479.	743.	1021.	1301.	1601.
41.	241.	487.	751.	1031.	1303.	1607.
43.	251.	491.	757.	1033.	1307.	1609.
47.	257.	499.	761.	1039.	1319.	1613.
53.	263.	503.	769.	1049.	1321.	1619.
59.	269.	509.	773.	1051.	1327.	1621.
61.	271.	511.	787.	1061.	1361.	1627.
67.	277.	523.	797.	1063.	1367.	1637.
71.	281.	541.	809.	1069.	1373.	1657.
73.	283.	547.	811.	1087.	1381.	1663.
79.	293.	557.	821.	1091.	1399.	1667.
83.	307.	563.	823.	1093.	1409.	1669.
89.	311.	569.	827.	1097.	1423.	1693.
97.	313.	571.	829.	1103.	1427.	1697.
101.	317.	577.	839.	1109.	1429.	1699.
103.	331.	587.	853.	1117.	1433.	1709.
107.	337.	593.	857.	1123.	1439.	1721.
109.	347.	599.	859.	1129.	1447.	1723.
113.	349.	601.	863.	1151.	1451.	1733.
127.	353.	607.	877.	1153.	1453.	1741.
131.	359.	613.	881.	1163.	1459.	1747.
137.	367.	617.	883.	1171.	1471.	1753.
139.	373.	619.	887.	1181.	1481.	1759.
149.	379.	631.	907.	1187.	1483.	1777.
151.	383.	641.	911.	1193.	1487.	1783.
157.	389.	643.	919.	1201.	1489.	1787.
163.	397.	647.	929.	1213.	1493.	1789.
167.	401.	653.	937.	1217.	1499.	1801.

T A B L E

Des Opérations que l'on a faites pour trouver le Logarithme du Nombre 54059.

	Nonbr. naturels.	Logarithm.
A.	54058.	4. 7328599.
C.	54058. $\frac{2222207}{10000000}$.	4. 7328679.
B.	54060.	4. 7328760.
B.	54060.	4. 7328760.
D.	54059. 4999930.	4. 7328719.
C.	54058. 9999907.	4. 7328679.
C.	54058. 9999907.	4. 7328679.
E.	54059. 2499912.	4. 7328699.
D.	54059. 4999930.	4. 7328719.
C.	54058. 9999907.	4. 7328679.
F.	54059. 1249908.	4. 7328689.
E.	54059. 2499912.	4. 7328699.
C.	54058. 9999907.	4. 7328679.
G.	54059. 0624907.	4. 7328684.
F.	54059. 1249908.	4. 7328689.
C.	54058. 9999907.	4. 7328679.
H.	54059. 0312406.	4. 7328681.
G.	54059. 0624907.	4. 7328684.
C.	54058. 9999907.	4. 7328679.
I.	54059. 0156156.	4. 7328680.
H.	54059. 0312406.	4. 7328681.

T A B L E

Pour réduire en Temps les Parties

DE L'EQUATEUR.

Deg.	Heur.	Min.	Deg.	Heur.	Min.	Degrés.	Heures.	Minutes.
Min.	Min.	Sec.	Min.	Min.	Sec.			
Sec.	Sec.	Tierc.	Sec.	Sec.	Tierc.			
1.	0.	4.	31.	2.	4.	70.	4.	40.
2.	0.	8.	32.	2.	8.	80.	5.	20.
3.	0.	12.	33.	2.	12.	90.	6.	0.
4.	0.	16.	34.	2.	16.	100.	6.	40.
5.	0.	20.	35.	2.	20.	110.	7.	20.
6.	0.	24.	36.	2.	24.	120.	8.	0.
7.	0.	28.	37.	2.	28.	130.	8.	40.
8.	0.	32.	38.	2.	32.	140.	9.	20.
9.	0.	36.	39.	2.	36.	150.	10.	0.
10.	0.	40.	40.	2.	40.	160.	10.	40.
11.	0.	44.	41.	2.	44.	170.	11.	20.
12.	0.	48.	42.	2.	48.	180.	12.	0.
13.	0.	52.	43.	2.	52.	190.	12.	40.
14.	0.	56.	44.	2.	56.	200.	13.	20.
15.	1.	0.	45.	3.	0.	210.	14.	0.
16.	1.	4.	46.	3.	4.	220.	14.	40.
17.	1.	8.	47.	3.	8.	230.	15.	20.
18.	1.	12.	48.	3.	12.	240.	16.	0.
19.	1.	16.	49.	3.	16.	250.	16.	40.
20.	1.	20.	50.	3.	20.	260.	17.	20.
21.	1.	24.	51.	3.	24.	270.	18.	0.
22.	1.	28.	52.	3.	28.	280.	18.	40.
23.	1.	32.	53.	3.	32.	290.	19.	20.
24.	1.	36.	54.	3.	36.	300.	20.	0.
25.	1.	40.	55.	3.	40.	310.	20.	40.
26.	1.	44.	56.	3.	44.	320.	21.	20.
27.	1.	48.	57.	3.	48.	330.	22.	0.
28.	1.	52.	58.	3.	52.	340.	22.	40.
29.	1.	56.	59.	3.	56.	350.	23.	20.
30.	2.	0.	60.	4.	0.	360.	24.	0.

T A B L E

Pour réduire le Temps en Parties

DE L'EQUATEUR.

Heures.	Degrés.	Min.	Deg.	Min.	Min.	Deg.	Min.
		Sec.	Min.	Sec.	Sec.	Min.	Sec.
		Tierc.	Sec.	Tierc.	Tierc.	Sec.	Tierc.
1.	15.	1.	0.	15.	31.	7.	45.
2.	30.	2.	0.	30.	32.	8.	0.
3.	45.	3.	0.	45.	33.	8.	15.
4.	60.	4.	1.	0.	34.	8.	30.
5.	75.	5.	1.	15.	35.	8.	45.
6.	90.	6.	1.	30.	36.	9.	0.
7.	105.	7.	1.	45.	37.	9.	15.
8.	120.	8.	2.	0.	38.	9.	30.
9.	135.	9.	2.	15.	39.	9.	45.
10.	150.	10.	2.	30.	40.	10.	0.
11.	165.	11.	2.	45.	41.	10.	15.
12.	180.	12.	3.	0.	42.	10.	30.
13.	195.	13.	3.	15.	43.	10.	45.
14.	210.	14.	3.	30.	44.	11.	0.
15.	225.	15.	3.	45.	45.	11.	15.
16.	240.	16.	4.	0.	46.	11.	30.
17.	255.	17.	4.	15.	47.	11.	45.
18.	270.	18.	4.	30.	48.	12.	0.
19.	285.	19.	4.	45.	49.	12.	15.
20.	300.	20.	5.	0.	50.	12.	30.
21.	315.	21.	5.	15.	51.	12.	45.
22.	330.	22.	5.	30.	52.	13.	0.
23.	345.	23.	5.	45.	53.	13.	15.
24.	360.	24.	6.	0.	54.	13.	30.
25.	375.	25.	6.	15.	55.	13.	45.
26.	390.	26.	6.	30.	56.	14.	0.
27.	405.	27.	6.	45.	57.	14.	15.
28.	420.	28.	7.	0.	58.	14.	30.
29.	435.	29.	7.	15.	59.	14.	45.
30.	450.	30.	7.	30.	60.	15.	0.

TABLE des Réfractions.

no.	Réfract.	Haut.	Réfract.	Haut.	Réfract.
1.	31. m. 20. f.	31. 2.	1. m. 38. f.	61. 0.	0. m. 33. f.
2.	27. 56.	32.	1. 34.	62.	0. 31.
3.	21. 4.	33.	1. 30.	63.	0. 30.
4.	16. 6.	34.	1. 27.	64.	0. 28.
5.	12. 48.	35.	1. 23.	65.	0. 27.
6.	10. 32.	36.	1. 20.	66.	0. 26.
7.	8. 55.	37.	1. 18.	67.	0. 25.
8.	7. 44.	38.	1. 15.	68.	0. 24.
9.	6. 47.	39.	1. 12.	69.	0. 22.
10.	6. 4.	40.	1. 10.	70.	0. 21.
11.	5. 28.	41.	1. 7.	71.	0. 20.
12.	4. 58.	42.	1. 5.	72.	0. 19.
13.	4. 32.	43.	1. 3.	73.	0. 18.
14.	4. 12.	44.	1. 1.	74.	0. 17.
15.	3. 54.	45.	0. 59.	75.	0. 16.
16.	3. 38.	46.	0. 58.	76.	0. 14.
17.	3. 24.	47.	0. 56.	77.	0. 13.
18.	3. 11.	48.	0. 54.	78.	0. 12.
19.	3. 0.	49.	0. 52.	79.	0. 11.
20.	2. 49.	50.	0. 50.	80.	0. 10.
21.	2. 39.	51.	0. 49.	81.	0. 9.
22.	2. 31.	52.	0. 47.	82.	0. 8.
23.	2. 25.	53.	0. 45.	83.	0. 7.
24.	2. 18.	54.	0. 43.	84.	0. 6.
25.	2. 12.	55.	0. 41.	85.	0. 5.
26.	2. 6.	56.	0. 40.	86.	0. 4.
27.	2. 0.	57.	0. 38.	87.	0. 3.
28.	1. 55.	58.	0. 37.	88.	0. 2.
29.	1. 51.	59.	0. 35.	89.	0. 1.
30.	1. 46.	60.	0. 34.	90.	0. 0.
31.	1. 42.				

*Table de la Grandeur, de la Distance & de la Révolution
de chaque Planette.*

Table des Parallaxes du Soleil.

Haut.	Parallaxes.
0 p.	0 m. 10 f.
10.	0. 10.
20.	0. 9.
30.	0. 8.
40.	0. 6.
50.	0. 5.
60.	0. 3.
70.	0. 2.
80.	0. 0.
90.	0. 0.

Noms des Planettes.	Diamètres des Planettes.	Distances des Planettes au Soleil. Plus grande.	Plus petite.	Révolutions des Plan. sur leurs Axes.	Révolutions des Planettes autour du Soleil.
Le Soleil.	100 diam. de la T.	0 0 0	0 0 0	25 j. 12 h.	0 0 0
Mercure.	$\frac{1}{2}$ du diam. de la T.	10274 di. de la T.	6754 di. de la T.	Inconnue.	88 jours.
Venus.	Égale à la Terre.	16016.	15796.	23 h. 20 m.	224 j. 18. h.
La Terre.	2865 lieues.	22374.	21626.	23 h. 56 m.	365 j. 5 h. 48. m.
La Lune.	$\frac{1}{2}$ du di. de la Terr.	Dist. à la Terre. 31 di. de la T.	Dist. à la Terre. 27 di. de la T.	27 jours.	29 j. 12 h.
Mars.	$\frac{1}{2}$ du di. de la Terr.	Dist. au Soleil. 36630.	Dist. au Soleil. 30426.	24 h. 40 m.	1 an 321 j. 22 h.
Jupiter.	10 di. de la T. p. p.	119900.	108900.	9 h. 56 m.	11 ans 313 jours.
Saturne.	10 di. de la T. p. m.	221870.	197802.	Inconnue.	29 ans 155 jours.

TRAITE COMPLET DE TRIGONOMETRIE.

ON donne le nom de *Trigonométrie* à la science de mesurer les Angles & les Côtés des Triangles qui peuvent être soumis à des principes constans ; & comme ces Triangles sont ou rectilignes ou sphériques , on divise la Trigonométrie en *Trigonométrie rectiligne* , & en *Trigonométrie sphérique*. Je me propose ici de traiter de chacune en particulier , après que j'aurai enseigné l'Origine , la Construction , & l'Usage des Tables qui sont nécessaires pour la pratique de cette science.

LIVRE PREMIER.

*De l'Origine , de la Construction , & de l'Usage
des Tables qui sont nécessaires pour la
pratique de la Trigonometrie.*

SECTION PREMIERE. DES SINUS.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine de la Table de Sinus.

N^o. I. **L**ORSQUE l'on connoît chaque angle d'un triangle † quelconque ABC*, * Fig. 1.
il est toujours possible d'inscrire dans un cercle

† Ce que nous disons des triangles dans le premier livre & dans le second , ne doit s'entendre que des triangles rectilignes.

- quelconque Z un triangle DEF équiangle à ce triangle ABC (a). Et comme les côtés DE DF, & FE d'un triangle qui est inscrit dans un cercle, deviennent des cordes de ce même cercle, qui tendent des arcs doubles de ceux qui sont les mesures des angles de ce triangle (b); si l'on avoit une Table des valeurs de toutes les cordes d'un cercle quelconque Z dont on auroit supposé le diamètre divisé en un certain nombre de parties égales entr'elles, lorsque l'on connoîtroit la valeur de chaque angle d'un triangle quelconque ABC, on trouveroit facilement celle de chaque côté d'un triangle DEF équiangle à ce triangle ABC. Car en cherchant dans cette Table la valeur de la corde qui soutiendrait un arc double de celui qui seroit la mesure de l'Angle A égal à l'angle D, on auroit la valeur du côté EF de ce triangle; en cherchant de même la valeur de la corde qui soutiendrait un arc double de celui qui seroit la mesure de l'angle B égal à l'angle E, on auroit la valeur du côté DF; en cherchant enfin la valeur de la corde qui soutiendrait un arc double de celui qui seroit la mesure de l'angle C égal à l'angle F, on auroit la valeur du côté DE. Or, lorsque deux triangles sont équiangles, & que l'on connoit chaque côté de l'un avec l'un des côtés de l'autre, on peut trouver par la règle de proportion chacun des deux côtés inconnus. (c) Donc, si l'on connois-
- (a) E. I. 4.
P. 2.
- (b) E. I. 3.
P. 20.
- (c) E. I. 6.
P. 4.

Soit aussi l'un des côtés du triangle ABC, on trouveroit par la règle de proportion chacun de ses autres côtés.

2. RECIPROQUEMENT, lorsque l'on connoîtroit la valeur de chaque côté d'un triangle quelconque DEF inscrit dans le même cercle précédent Z, on trouveroit par le moyen de cette même Table, la valeur de chaque angle d'un triangle quelconque ABC équiangle à ce triangle DEF; puisqu'en cherchant dans cette Table de quel arc le côté EF seroit la corde, on auroit la valeur d'un arc EMF double de celui qui seroit la mesure de l'angle D égal à l'angle A de ce triangle ABC: qu'en cherchant de même de quel arc le côté DF seroit la corde, on auroit la valeur d'un arc DLF double de celui qui seroit la mesure de l'angle E égal à l'angle B: & qu'en cherchant enfin de quel arc le côté DE seroit la corde, on auroit la valeur d'un arc DKE double de celui qui seroit la mesure de l'angle F égal à l'angle C.

Ainsi, lorsque l'on connoîtroit la valeur de l'un quelconque A des angles d'un triangle quelconque ABC, on trouveroit (a) celle du (a) N. 1. côté EF d'un triangle DEF équiangle à ce triangle ABC & inscrit dans le cercle Z. Or, lorsque l'on connoît la valeur de chaque côté d'un triangle quelconque ABC, avec celle de l'un quelconque EF, des côtés d'un triangle DEF équiangle à ce triangle ABC, on trouve

4. TRAITE' COMPLET

par la règle de proportion la valeur de chacun des autres côtés D E & D F de ce triangle DEF (a). Donc, lorsque l'on connoîtroit la valeur de chaque côté d'un triangle quelconque ABC avec celle de l'un de ses angles, on trouveroit celle de chacun de ses autres angles. †

3. IL s'agit donc de supposer que le diamètre d'un cercle quelconque Z est divisé en un certain nombre de parties égales entr'elles, & de chercher ensuite le nombre de ces parties qui convient à chaque corde de ce cercle, depuis celle qui soutend l'arc d'une minute, ou même celle qui soutend l'arc d'une seconde ‡, jusqu'à celle qui soutend la demi-circonférence, laquelle est la plus grande de toutes (b), afin de construire une Table des valeurs de ces cordes, c'est-à-dire, des valeurs des côtés de tous les triangles qu'il sera possible d'inscrire dans ce cercle Z, & à quelqu'un desquels tel triangle que l'on puisse proposer, sera par conséquent

† On verra dans le second livre, que pour connoître la valeur de chaque angle d'un triangle quelconque ABC*, il suffit de connoître celle de chaque côté de ce triangle, ou celle de deux de ses côtés avec celle de l'un de ses angles.

‡ C'est pousser la précision assez loin pour la pratique, que de borner la division du cercle à des arcs d'une seconde. Ainsi l'on peut dire qu'en ayant les valeurs de toutes les cordes d'un cercle, depuis celle qui soutend un arc d'une seconde jusqu'à celle qui soutend la demi-circonférence, on a les valeurs des côtés de tous les triangles qu'il est possible d'inscrire dans ce cercle, quoiqu'il y ait effectivement des arcs qui, outre un certain nombre de degrés, de minutes & de secondes, contiennent encore des tierces, des quarts, &c. & même des parties qui sont incommensurables avec la circonférence.

* Fig. 1.

DE TRIGONOMETRIE.

équiangle. Mais comme les demi-côtés DG, DH & FI d'un triangle quelconque DEF ont entr'eux les mêmes rapports que les côtés DE, DF & FE de ce même triangle (a), & ces côtés (a) E. l. 5. les mêmes rapports entr'eux que les côtés AB, AC & CB d'un triangle quelconque ABC qui est équiangle à ce triangle DEF (b), les demi-côtés du triangle DEF ont entr'eux les mêmes rapports que les côtés du triangle ABC (c). (b) E. l. 6. (c) E. l. 5. Ainsi, il suffit de connoître chaque demi-côté du triangle DEF avec l'un des côtés du triangle ABC, pour trouver chacun des autres côtés de ce dernier triangle; & réciproquement, de connoître chaque côté du triangle ABC avec l'un des demi-côtés du triangle DEF, pour trouver chacun des autres demi-côtés de ce triangle DEF; & par conséquent, au lieu de construire une Table des valeurs de toutes les cordes d'un cercle, il suffit d'en construire une des valeurs des moitiés de ces cordes.

4. OR, ces demi-cordes, c'est-à-dire, ces demi-côtés de triangles inscrits dans un cercle Z, se nomment les *Sinus* des moitiés des arcs qui sont soutendus par les cordes entières, Ainsi, la moitié DG de la corde DE est le *sinus* de la moitié DK de l'arc DKE qui est soutendu par cette corde entière DE. De même, la moitié DH de la corde DF est le *sinus* de la moitié DL de l'arc DLF. Enfin, la moitié FI de la corde FE est le *sinus* de la moitié FM de l'arc FME; & par conséquent on peut dire en gé-

6 TRAITE' COMPLET

neral, que *le Sinus d'un arc est la moitié de la corde qui sôutend le double de cet arc.*

5. ENFIN, comme les côtés des triangles qui sont inscrits dans un cercle, sôutendent des arcs doubles de ceux qui sont les mesures des angles qui sont opposés à ces côtés (a), au lieu d'écrire dans la Table les valeurs des moitiés de ces côtés, vis-à-vis des arcs que ces côtés entiers sôutendent, on les écrit vis-à-vis des moitiés de ces arcs; & par ce moyen on s'évite la peine, premièrement, de doubler les angles donnés A, B & C dans un triangle ABC, pour chercher dans la Table les valeurs des demi-côtés du triangle DEF équiangle à ce triangle ABC; secondement, de prendre les moitiés des arcs FME, DLF & DKE qui sont sôuten- dus par les doubles des demi-côtés donnés FI, DH & DG dans le triangle DEF, pour avoir les valeurs des angles d'un triangle ABC équian- gle à ce triangle DEF, après avoir trouvé dans la Table celles de ces arcs.

COROLLAIRE I.

- (b) N. 4. 6. Il suit de la définition des Sinus (b); qu'un arc & le supplément † de cet arc ont le même sinus.
- * Fig. 2. L'arc AB* & son supplément BC ont le même sinus BE.

† On appelle *Supplément* d'un arc; la différence de cet arc à la moitié de la circonférence d'un cercle. Ainsi l'arc BC* est le supplément de l'arc AB; & réciproquement l'arc AB est celui de l'arc BC.

Construction. Prolongez la demi-circonférence A B C jusqu'à la circonférence entière ABCDA, & le sinus B E jusqu'à ce qu'il rencontre en un point D cette circonférence.

Démonstration. L'arc AB & son supplément BC forment ensemble la moitié ABC de la circonférence du cercle Z; ainsi le double BAD de cet arc AB & le double BCD de son supplément BC forment ensemble la circonférence entière de ce même cercle. Mais dans un cercle qui est divisé en deux segmens, le petit arc & le grand arc sont soutenus par une même corde; donc dans le cercle Z la même corde BED soutient le petit arc BAD & le grand arc BCD. Or l'arc BAD est double de l'arc AB & l'arc BCD est double du supplément BC de cet arc AB; donc la même corde BED soutient le double de l'arc AB & le double du supplément BC de cet arc A B ; & par conséquent, puisque le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutient le double de cet arc (a), la moitié BE de (a) N. 4. cette corde BED est en même temps le sinus de l'arc AB & le sinus du supplément BC de cet arc A B. Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

7. Il suit aussi de la même définition (b), que (b) N. 4. la perpendiculaire qui est tirée de l'une des extrémités d'un arc au diamètre qui termine ce même arc par son autre extrémité, est le sinus de cet arc.

La perpendiculaire BE* qui est tirée de l'une* Fig. 3.

8. TRAITE' COMPLET

B des extrémités de l'arc AB au diamètre AC qui termine ce même arc par son autre extrémité A, est le sinus de cet arc AB.

Const. Prolongez la perpendiculaire BE indéfiniment vers D, & l'arc AB jusqu'à ce qu'il rencontre en un point D le prolongement de cette perpendiculaire.

Démonst. Puisque le diamètre AC de l'arc BAD est perpendiculaire à la corde BED [H], il divise en deux parties égales, & cette corde BED au point E (a), & cet arc BAD au point A (b). Ainsi cette corde BED soutient un arc BAD double de l'arc AB; & par conséquent, puisque la perpendiculaire BE est la moitié de cette corde, cette perpendiculaire est le sinus de cet arc AB (c). Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

8. Il suit enfin de la même définition (d), que le sinus d'un arc de 90 degrés, c'est-à-dire, du quart de la circonférence d'un cercle, est un rayon de ce même cercle.

Démonst. Le sinus d'un arc est la moitié de la corde qui soutient le double de cet arc (e); ainsi le sinus du quart de la circonférence d'un cercle est la moitié de la corde qui soutient la moitié de la circonférence de ce cercle. Or la moitié de la corde qui soutient la moitié de la circonférence d'un cercle, est un rayon de ce cercle, puisque cette corde est un diamètre de ce même cercle. Donc C. Q. F. D.

Définition.

Définition.

9. Le sinus d'un arc de 90 degrés se nomme le sinus total.

SCHOLIE.

10. Lorsque l'on considère un arc de cercle quelconque AB^* , comme étant la mesure d'un angle C , au lieu de dire : le sinus BD de l'arc AB qui est la mesure de l'angle C , on dit seulement, le sinus BD de l'angle C . * Fig. 4.

CHAPITRE II.

Des Principes de la Construction d'une Table des demi-Cordes ou des Sinus.

PROPOSITION I. Théorème.

11. **L**E rectangle fait des diagonales d'un quadrilatere quelconque qui est inscrit dans un cercle, est égal à la somme des deux rectangles faits chacun des côtés opposés de ce même quadrilatere.

Dans le quadrilatere $ABCD^*$ qui est inscrit dans le cercle Z , le rectangle fait des diagonales AC & BD est égal à la somme des rectangles faits, l'un du côté AB & du côté DC , & l'autre du côté AD & du côté BC . * Fig. 5.

Constr. Faites sur le côté AB l'angle ABE égal à l'angle DBC . (a)

(a) E. l. 1.

Démonstr. Les triangles ABE & DBC sont équiangles (b), puisque les angles ABE & DBC sont égaux. P. 23.
(b) E. l. 1.
p. 32.

B

DBC sont égaux [c], & que les angles BAC & BDC qui s'appuient sur le même arc BC, le
 (a) E. 1. 3. sont aussi (a). Ainsi $AE : AB :: DC : BD$ (b);
 P. 21.
 (b) E. 1. 6. & par conséquent le rectangle fait de AE
 P. 4. & de BD est égal au rectangle fait de AB &
 (c) E. 1. 6. de DC (c).
 P. 16.

Or, les triangles ABD & EBC sont aussi
 (d) E. 1. 1. équiangles (d), puisque les angles ADB & ACB
 P. 32. qui s'appuient sur le même arc AB, sont égaux
 (e) E. 1. 3. (e), & que les angles ABD & EBC qui sont
 P. 21. composés, l'un de l'angle EBD & de l'angle
 ABE, & l'autre du même angle EBD & de l'an-
 gle DBC qui est égal à l'angle ABE [c], sont aussi
 (f) E. 1. 6. égaux. Ainsi $AD : BD :: EC : BC$ (f); & par
 P. 4. conséquent le rectangle fait de EC & de BD
 est égal au rectangle fait de AD & de BC (g).
 (g) E. 1. 6. Donc, la somme des rectangles faits, l'un de
 P. 16. AE & de BD, & l'autre de EC & aussi de BD, est
 égale à celle des rectangles faits, l'un de AB &
 de DC, & l'autre de AD & de BC. Mais cette
 première somme est la même chose que le rec-
 (h) E. 1. 2. tangle fait de AC & de BD (h), puisque AE & EC
 P. 1. sont les parties de la ligne AC. Donc le rectan-
 gle fait de AC & de BD est égal à la somme des
 rectangles faits, l'un de AB & de DC, & l'autre
 de AD & de BC; & par conséquent C. Q. F. D.

PROPOSITION II. Problème.

12. *Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du supplément de cet arc.*

* Fig. 6. On donne le diamètre du cercle Z * avec la

DE TRIGONOMETRIE. II

corde AB de l'arc ADB de ce même cercle; & il faut trouver la corde BC du supplément BEC de cet arc.

Solution. Du quarré du diamètre donné retranchez le quarré de la corde donnée AB, & la racine quarrée du reste, sera la corde demandée BC.

Constr. Tirez du point A au point C la ligne droite AC.

Démonstr. L'arc ADB & le supplément BEC de cet arc, forment ensemble la demi-circonférence ADBEC du cercle Z (a). Ainsi la ligne (a) N. 6. 1 AC qui joint ensemble les extrémités A & C de cette demi-circonférence est un diamètre de ce cercle, & l'angle B qui est formé par la corde AB de l'arc ADB & par la corde BC du supplément BEC de cet arc, est un angle droit (b); (b) E. 1. 3. & par conséquent le diamètre AC du cercle Z, P. 31. la corde AB d'un arc ADB de ce cercle, & la corde BC du supplément BEC de cet arc, forment toujours ensemble un triangle rectangle ABC, dont le diamètre AC de ce même cercle est l'hypoténuse. Or, puisque le triangle ABC est toujours rectangle, si du quarré de son hypoténuse AC qui est le diamètre donné, on retranche le quarré de son côté AB qui est la corde donnée, le reste sera le quarré de son autre côté BC (c) qui est la corde demandée; & (c) E. 1. 2. par conséquent la racine quarrée de ce reste, P. 47. sera cette corde demandée. Donc C. Q. F. F.

PROPOSITION III. Problème.

13. Connoissant le diamètre d'un cercle & les cordes de deux arcs de ce même cercle, trouver la corde de la somme de ces deux arcs.

* Fig. 7. On donne le diamètre du cercle Z* avec les cordes AB & AC des arcs AEB & AFC de ce même cercle; & il faut trouver la corde BC de la somme CFAEB de ces arcs.

(*) N. 12. *Solution.* Trouvez (a) les cordes des suppléments des arcs donnés AEB & AFC. Multipliez ensuite la corde donnée AB par celle du supplément de l'arc AFC, & la corde aussi donnée AC par celle du supplément de l'arc AEB. Enfin divisez la somme des produits par le diamètre donné, & le quotient sera la corde demandée BC.

Constr. Tirez le diamètre AD, & les cordes BD & CD.

Démonstr. Les cordes données AB & AC des arcs AEB & AFC forment toujours avec les cordes BD & CD des suppléments de ces arcs, un quadrilatère ABDC qui est inscrit dans le cercle proposé, & dont l'une des diagonales est le diamètre AD de ce même cercle, & l'autre la corde demandée BC. Or, le rectangle fait de cette diagonale AD & de cette autre diagonale BC est égal à la somme des rectangles faits, l'un de la corde donnée AB & de la corde CD du supplément de l'arc AFC, & l'autre de la corde aussi donnée AC & de la corde BD

(*) N. 11. du supplément de l'arc AEB (b). Donc le quo-

ient de cette somme divisée par la diagonale AD, c'est-à-dire, par le diamètre donné, est l'autre diagonale BC, c'est-à-dire, la corde demandée; & par conséquent C, Q. F. F.

PROPOSITION IV. Problème.

14. *Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du double de cet arc.*

On donne le diamètre du cercle Z * avec * Fig. 8.
la corde AB de l'arc AEB de ce même cercle;
& il faut trouver la corde BC du double de cet arc.

Solution. Trouvez (a) la corde du supplément de l'arc donné AEB. Multipliez ensuite cette corde par la corde donnée AB. Enfin divisez le double du produit par le diamètre donné, & le quotient sera la corde demandée BC. (a) N. 12.

Constr. Tirez le diamètre AD, & les cordes BD, AC & CD.

Démonstr. La corde demandée BC est égale aux produits faits, l'un de la corde donnée AB de l'arc AEB multipliée par la corde CD du supplément de l'arc AFC, & l'autre de la corde AC de l'arc AFC multipliée par la corde BD du supplément de l'arc AEB, pris ensemble & divisés par le diamètre donné AD (b). Or, ces (b) N. 13.
produits pris ensemble sont égaux au double du produit de la corde donnée AB de l'arc AEB multipliée par la corde BD du supplément de cet arc, puisque les cordes AB & AC étant éga-

14 TRAITE' COMPLET

les [H], les cordes BD & CD le sont aussi (a) N. 6. †. si (a), & que par conséquent le produit de AB multipliée par BD, ou par CD, & celui de AC multipliée par BD, sont égaux. Donc, en divisant par le diamètre AD le double du produit de la corde donnée AB de l'arc AEB multipliée par la corde BD du supplément de cet arc, le quotient est la corde demandée BC; & par conséquent C. Q. F. F.

PROPOSITION V. Problème.

15. Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du triple de cet arc.

* Fig. 9. On donne le diamètre du cercle Z* avec la corde AB de l'arc AEB de ce même cercle; & il faut trouver la corde AC du triple de cet arc.

(b) N. 14. *Solution.* Trouvez (b) la corde BC du double BDC de l'arc donné AEB. Trouvez ensuite (c) la corde de la somme de l'arc donné AEB & de cet arc BDC, & cette corde sera la corde demandée AC.

PROPOSITION VI. Problème.

16. Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du quintuple de cet arc.

* Fig. 10. On donne le diamètre du cercle Z* avec la corde AB de l'arc AEB de ce même cercle; & il faut trouver la corde AC du quintuple de cet arc.

(d) N. 15. *Solution.* Trouvez (d) la corde AD du triple AEBD de l'arc donné AEB. Trouvez aussi (e)

la corde DC du double DFC du même arc AEB. Enfin trouvez (a) la corde de la somme (a) N. 13. de ces arcs AEBD & DFC, & cette dernière corde sera la corde demandée AC.

PROPOSITION VII. Problème.

17. *Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle de la moitié de cet arc.*

On donne le diamètre du cercle Z* avec la corde AB de l'arc ACB de ce même cercle; & il faut trouver la corde AC de la moitié de cet arc. *Fig. 11.

Solution. Du quarré de la moitié du diamètre donné, retranchez le quarré de la moitié AE de la corde donnée AB; & de la même moitié du diamètre donné, retranchez la racine quarrée du reste. Ajoutez ensuite le quarré de ce second reste au quarré de la moitié AE de la corde donnée AB, & la racine quarrée de la somme sera la corde demandée AC.

Constr. Tirez les demi-diamètres AD & CD.

Démonstr. La corde AB est divisée par le demi-diamètre CD en deux parties AE & EB qui sont égales (b), puisque l'arc AC est la moitié de l'arc ACB [H]. Donc le demi-diamètre AD, la moitié AE de la corde donnée AB, & la partie ED du demi-diamètre CD comprise entre la corde A & le centre D du cercle Z, forment toujours ensemble un triangle AED qui est rectangle (c), & dont ce demi-diamètre AD est l'hypoténuse. Ainsi, en re-

- * tranchant du quarré de ce demi-diamètre AD le quarré de la moitié AE de la corde donnée AB, le reste est le quarré de cette partie ED du demi-diamètre CD (a); & par conséquent, en retranchant de ce demi-diamètre la racine quarrée de ce reste, on a l'autre partie CE de ce même demi-diamètre. Or, la corde demandée AC, la moitié AE de la corde donnée AB, & cette autre partie CE du demi-diamètre CD, forment aussi ensemble un triangle AEC qui est rectangle (b), & dont cette même corde demandée AC est l'hypoténuse. Donc, en ajoutant le quarré de cette autre partie CE du demi-diamètre CD au quarré de la moitié AE de la corde donnée AB, la somme est le quarré de la corde demandée AC (c); & par conséquent la racine quarrée de cette somme, est cette corde demandée AC. Donc C. Q. F. F.
- (a) E. 1. I. P. 47.
(b) E. 1. 3. P. 3.
(c) E. 1. I. P. 47.

PROPOSITION VBI. Problème.

18. *Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du tiers de cet arc.*

- * Fig. 9. On donne le diamètre du cercle Z* avec la corde AC de l'arc AEBDC de ce même cercle; & il faut trouver la corde AB du tiers de cet arc.

Solution. Supposéz que le nombre des parties du diamètre que contient la corde demandée AB, est un peu plus grand que le tiers de celui qui est donné pour la corde AC; parce que la corde AB est un peu plus grande que le tiers de cette

cette corde AC. Cherchez ensuite (a) le nombre des parties de ce même diamètre que doit avoir cette corde AC relativement au nombre que vous en aurez supposé à la corde AB; & si vous trouvez le même nombre que celui qui est donné, le nombre que vous aurez supposé, sera le nombre demandé. Mais si le nombre de ces parties que vous trouverez par cette voie pour cette corde AC, est plus grand ou plus petit que le nombre donné, diminuez ou augmentez le nombre que vous aurez supposé pour la corde AB, jusqu'à ce que vous en rencontriez un qui donne pour cette corde AC le même nombre que celui qui est donné, & il sera le nombre demandé.

PROPOSITION IX. Problème.

19. *Connoissant le diamètre d'un cercle & la corde d'un arc de ce même cercle, trouver celle du cinquième de cet arc.*

On donne le diamètre du cercle Z* avec la corde AC de l'arc AEBDFC de ce même cercle; & il faut trouver la corde AB du cinquième de cet arc. * Fig. 10.

Solution. Supposez, comme dans le problème précédent, que le nombre des parties du diamètre que contient la corde demandée AB est un peu plus grand que le cinquième de celui qui est donné pour la corde AC, parce que la corde AB est un peu plus grande que la cinquième partie de cette corde AC. Cherchez ensuite (b) le nombre des parties de ce même

diamètre que doit avoir cette corde AC relativement au nombre que vous en aurez supposé à la corde AB ; & si vous trouvez le même nombre que celui qui est donné, le nombre que vous aurez supposé, sera le nombre demandé. Mais si le nombre de ces parties que vous trouverez par cette voie pour cette corde AC, est plus grand ou plus petit que le nombre donné, diminuez ou augmentez le nombre que vous aurez supposé pour la corde AB, jusqu'à ce que vous en rencontriez un qui donne pour cette corde AC le même nombre que celui qui est donné, & il sera le nombre demandé. †

CHAPITRE III.

De la Manière de construire une Table des Sinus. ¶

20. **L**ORSQUE l'on veut construire une table des sinus, on commence par

† Cette solution, ni celle du problème précédent, ne sont point géométriques, parce que l'on ne peut point diviser géométriquement un arc de cercle quelconque en un nombre impair de parties égales entr'elles. Mais comme on ne se sert que deux fois de chacun de ces problèmes pour construire une Table des sinus ; sçavoir du précédent, pour trouver la corde du tiers de l'arc de 7 d. 30 m. & celle du tiers de l'arc de 2 d. 30 m. & de celui-ci pour trouver la corde du cinquième de l'arc de 50 m. & celle du cinquième de l'arc de 10 m. on doit peu s'embarrasser si pour les résoudre, on est obligé de tâtonner.

¶ Il n'est point nécessaire de construire des Tables, puisque l'on en a de toutes faites ; mais on doit sçavoir les principes sur lesquels les calculs de ces Tables sont fondés, & la manière dont on a fait ces calculs, si l'on veut en bien comprendre les usages.

faire un cayer qui contienne 91 feuillets †, dont chacun soit divisé de part & d'autre en cinq colonnes de différentes largeurs, de la même manière dont la première des Tables qui sont à la fin de ce Traité, & que l'on donne pour exemple, est divisée. Et comme de ces cinq colonnes, il n'y a que la première à main gauche de chaque page, & la seconde, qui doivent servir pour l'objet qu'on se propose dans ce chapitre, sçavoir, la première, pour y nombrer les minutes, & la seconde, pour y marquer les sinus; on écrit seulement ce titre, *Minutes*, au haut de cette première colonne; cet autre titre, *Sinus*, au haut de la seconde; & l'on néglige les autres, parce qu'elles sont destinées pour des nombres dont il ne sera parlé que dans les sections suivantes. On écrit ensuite en titre, sur le *verso* de chaque feuillet, sçavoir, 0 DEGRE', au haut du 1^{er} & du 2^e; 1 DEGRE', au haut du 3^e & du 4^e; 2 DEGRE's, au haut du 5^e & du 6^e; & ainsi de suite, jusqu'à 44 DEGRE's qui se rencontrent sur les *verso* du 89^e feuillet & du 90^e. On écrit de même en titre sur le *recto* de chaque feuillet, sçavoir, 45 DEGRE's, au haut du 91^e & du 90^e; 46 DEGRE's, au haut du 89^e & du 88^e; & ainsi de suite en

† On suppose que l'on ne veut construire que les petites Tables *ordinaires*, qui sont les plus commodes pour la pratique de la Trigonométrie-rectiligne. Mais si l'on vouloit en faire de grandes qui contiennent les sinus des secondes, il faudroit un plus grand nombre de pages, puisque chaque degré en occuperoit 60, si l'on ne mettoit qu'une minute dans chacune.

rétrogradant, jusqu'à 89 DEGRE's qui se rencontrent sur les *recto* du 3^e feuillet & du 2^e. Enfin, on remplit les colonnes qui sont destinées aux minutes, sçavoir, premièrement celles qui sont sur les *verso* des feuillets dont le rang est impair, par ces nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à 30. inclusivement, posés perpendiculairement les uns sur les autres, & comptés en allant du haut de la page en bas : secondement, celles qui sont sur les *verso* des feuillets dont le rang est pair, par ces nombres 30, 31, 32, 33, &c. jusqu'à 60. inclusivement, posés de même & dans le même ordre que les précédents : troisièmement, celles qui sont sur les *recto* des feuillets dont le rang est impair, par ces mêmes nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à 30. inclusivement, posés aussi perpendiculairement les uns sur les autres, mais comptés en allant du bas de la page au haut : quatrièmement enfin, celles qui sont sur les *recto* des feuillets dont le rang est pair, par les mêmes nombres 30, 31, 32, 33, &c. jusqu'à 60. inclusivement, posés de la même manière & dans le même ordre que les derniers.

21. Par cet arrangement, les degrés qui sont nombrés au haut des pages, expriment, conjointement avec les minutes qui sont marquées dans ces mêmes pages, les valeurs de tous les arcs de cercle qui ne surpassent point le quart de la circonférence de ce cercle; & chaque arc s'y trouve écrit vis-à-vis de son Complé-

ment †, l'un sur les *verso* des feuillets, & l'autre sur les *recto*, ou au contraire, de manière qu'en ajoutant les degrés, ou les degrés & les minutes, que contient l'un des arcs qui sont sur les *verso*, aux degrés, ou aux degrés & aux minutes, que contient l'arc qui correspond au précédent sur le *recto*, la somme est toujours 90 deg. Ce qui est très-commode dans la pratique de la Trigonométrie-rectiligne, lorsque les triangles dont il s'agit sont rectangles; & dans la pratique de la Trigonométrie-sphérique, dans laquelle on est souvent obligé de se servir des complémens des arcs, au lieu des arcs mêmes.

22. Le cayer étant ainsi préparé, il s'agit de trouver les valeurs des sinus de tous les arcs, afin de les y écrire dans les colonnes qu'ils sont destinées, chacun vis-à-vis de l'arc auquel il appartient; ce qui se fait de la manière suivante.

Premièrement, on suppose que le rayon du cercle dont on veut connoître la valeur de chaque corde, est divisé en un très-grand nombre de parties égales entr'elles, par exemple, en 10000000 de parties, afin que l'on puisse négliger sans conséquence les restes des divisions & des extractions de racines que l'on sera obligé de faire pour trouver le nombre de ces parties que contient chacune de ces cordes. On prend ensuite la moitié de ce nombre de parties que

† On appelle *Complément* d'un arc, la différence de cet arc au quart de la circonférence d'un cercle.

l'on a supposées à ce rayon, & l'on écrit cette moitié dans la colonne des sinus, vis-à-vis de 30 *degrés 0 min.* parce que le rayon d'un cercle étant égal à la corde qui soutend la sixième

- (a) E. 1. 4. partie de la circonférence de ce cercle (a), la moitié du rayon est le sinus de la moitié de la
P. 15.
(b) N. 4. sixième partie de cette circonférence (b), & par conséquent de l'arc de 30 degrés.

- Secondement*, connoissant que la corde qui soutend l'arc de 60 deg. est de 10000000 de parties, on cherche (c) celle qui soutend l'arc de 30 deg. qui est la moitié de celui de 60; celle qui soutend l'arc de 15 deg. qui est la moitié de celui de 30; & celle qui soutend l'arc de 7 deg. 30 min. qui est la moitié de celui de 15 deg. On cherche ensuite (d) la corde qui soutend l'arc de 2 deg. 30 min. qui est le tiers de celui de 7 deg. 30 min. & celle qui soutend l'arc de 50 min. qui est le tiers de celui de 2 d. 30 m.
(c) N. 18.
(d) N. 19. Enfin, on cherche (e) la corde qui soutend l'arc de 10 min. qui est le cinquième de celui de 50 min. & celle qui soutend l'arc de 2 min. qui est le cinquième de celui de 10 min. Or, à mesure que l'on trouve les valeurs de ces cordes, on en prend les moitiés; & comme ces moitiés sont (f) les sinus des arcs de 15 deg. de 7 deg. 30 min. de 3 d. 45. m. de 1 deg. 15 min. de 25 min. de 5 min. & de 1 min. on les écrit dans les colonnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc dont elle est le sinus.

Troisièmement, connoissant la corde de l'arc

de 2 min. on cherche (a) celles des arcs de 4 (a) N. 14. min. de 8 min. de 16 min. &c. & (b) celles des (b) N. 15. arcs de 6 min. de 18 min. de 54 min. &c. On prend ensuite les moitiés des valeurs de ces cordes ; & comme ces moitiés sont (c) les sinus (c) N. 4. des arcs de 2 m. de 4 min. de 8 m. &c. de 3 m. de 9 min. de 27 min. &c. on les écrit aussi dans les colonnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc dont elle est le sinus.

Quatrièmement, connoissant les cordes des arcs de 10 min. & de 4 min. on cherche (d) (d) N. 13. celle de l'arc de 14. min. Connoissant les cordes des arcs de &c. on cherche celle de l'arc de &c. & ainsi des autres. Or, les moitiés des valeurs de ces cordes sont les sinus que l'on demande (e) ; ainsi on écrit ces moitiés dans les (e) N. 4. colonnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc dont elle est le sinus.

Cinquièmement enfin, après avoir trouvé, de la manière dont on vient de le dire, les cordes de tous les arcs du quart de la circonférence du cercle que l'on s'est proposé, depuis la corde qui soutient l'arc de 2 min. jusqu'à celle qui soutient l'arc de 90 deg. on cherche (f) les cor- (f) N. 12. des des suppléments de ces arcs. Or, comme les moitiés de ces dernières cordes sont (g) les (g) N. 4. sinus des arcs de 45 deg. & au dessus, jusqu'à 90, on écrit aussi ces moitiés dans les colonnes des sinus, chacune vis-à-vis de l'arc auquel elle appartient ; & la Table des sinus est construite.

On met un point dans cette Table avant les deux derniers des chiffres qui expriment les valeurs des sinus; parce que l'on néglige ordinairement ces deux chiffres dans les calculs de la Trigonométrie rectiligne, qui n'exige pas autant de précision que la Trigonométrie sphérique.

CHAPITRE IV.

De la manière de se servir de la Table des Sinus.

23. **L**A Table dont on vient d'enseigner la construction, sert à connoître la valeur du sinus d'un arc donné, & réciproquement celle de l'arc auquel appartient un sinus donné. Or, cet arc donné ou ce sinus donné se trouvent dans cette Table, ou ne s'y trouvent point. Ainsi, tous les usages de cette Table peuvent être renfermés dans les deux problèmes suivans, qui ont chacun deux cas.

PROBLEME I.

24. *Connoître la valeur du Sinus d'un arc donné.*

Premier Cas.

25. *Lorsque l'arc donné se trouve dans la Table.*

Si l'arc donné n'est point de plus de 90 degrés, & ne contient point de parties de minutes, il se trouve dans la Table; ainsi il est facile de connoître la valeur de son sinus, puisqu'elle

est écrite dans les colonnes des sinus, vis-à-vis de la valeur de ce même arc (a). Mais pour (a) N. 22. trouver sans peine cette dernière valeur, il faut observer que si elle est au dessous de 45 deg. on ne doit la chercher que sur les *verso* des feuillets de la Table; & que si elle est au contraire au dessus de ce nombre, on ne la trouvera que sur les *recto* des mêmes feuillets, & en allant dans un ordre rétrogradé (b). (b) N. 20.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple de 37 deg. 28 min. on cherchera sur les *verso* des feuillets de la Table, la page qui a pour titre 37 DEGRES. On cherchera ensuite dans la colonne des minutes de cette page le nombre 28; & vis-à-vis de ce nombre on trouvera dans la colonne des sinus ce autre nombre 60829.98. pour la valeur du sinus demandé.

MAIS si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple, de 52 deg. 43 min. alors on cherchera sur les *recto* des feuillets de la Table, la page qui a pour titre 52 DEGRES. On cherchera ensuite dans la colonne des minutes de cette page le nombre 43; & vis-à-vis de ce nombre on trouvera dans la colonne des sinus, ce autre nombre 79564.97. pour la valeur du sinus demandé.

En opérant de la même manière, on trouvera dans les colonnes des sinus, vis-à-vis de 0 minute, sçavoir, au haut de la page qui a pour titre 29 DEGRES, ce nombre 48480.96.

pour la valeur du sinus d'un arc de 29 deg. & au bas de la page qui a pour titre 66 DEGRES, cet autre nombre 91354.54. pour la valeur du sinus d'un arc de 66 degrés 7. Et ainsi des autres.

Second Cas.

26. *Lorsque l'arc donné ne se trouve point dans la Table.*

27. Si l'arc donné ne se trouve point dans la Table, par la seule raison qu'il est de plus de 90 degrés, au lieu de chercher sa valeur, on cherchera celle de son supplément; & le nombre que l'on trouvera dans la colonne des sinus, vis-à-vis de cette dernière valeur, exprimera également celle du sinus de l'arc vis-à-vis duquel on l'aura trouvée, & celle du sinus demandé, puisqu'un arc & le supplément de cet arc ont le même sinus (a).

(a) N. 6.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc, par exemple de 108 deg. 14 min. on cherchera dans la Table celle du sinus d'un arc de 71 deg. 46 min. qui est le supplément du premier, & le nombre 94979.02, que l'on y trouvera pour la valeur du sinus de ce dernier arc, sera pareillement celle du sinus de l'arc demandé.

28. *MAIS si l'arc donné ne se trouve point dans la Table; parce qu'il contient des parties.*

† On peut aussi trouver les mêmes valeurs des sinus de ces deux derniers arcs; en cherchant celles des sinus des arcs de 28 d. 60 m. & de 65 d. 60 m.

minutes ; alors , comme les différences de arc de la Table qui précède immédiatement l'arc donné , à ce même arc donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur , ne peuvent être que très - petites , on peut , sans erreur sensible , les supposer proportionnelles à celles des sinus de ces arcs. Ainsi , si l'on fait une règle de proportion , dont le premier terme soit 60 secondes ; le deuxième , l'excès de l'arc donné sur celui de la Table qui le précède immédiatement ; & le troisième , la différence des valeurs des sinus des deux arcs de la Table entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé : on pourra prendre le quatrième pour l'excès du sinus demandé sur le sinus de la Table qui le précède immédiatement ; & par conséquent , si l'on ajoute ce quatrième terme à ce dernier sinus , la somme sera le sinus demandé.

Ainsi , si l'on veut connoître la valeur du sinus d'un arc , par exemple de 34 deg. 17 min. 18 sec. on fera une règle de proportion , dont le premier terme sera 60 secondes ; le deuxième , 18 secondes ; & le troisième , la différence 2403 du sinus 56328.57. de l'arc de 34 deg. 17 min. au sinus 56352.60. de l'arc de 34 deg. 18 min. entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé , & qui se trouvent dans la Table. On ajoutera ensuite le quatrième terme 1121. de cette proportion au sinus 56328.57. de l'arc de 34 deg. 17 min. qui précède immédiatement

ment l'arc donné, & la somme 56339.78. sera la valeur du sinus demandé.

PROBLEME II.

29. Connoître la valeur de l'arc \dagger auquel appartient un Sinus donné.

Premier Cas.

30. Lorsque le Sinus donné se trouve dans la Table.

Si le sinus donné se trouve dans la Table, il est facile de connoître la valeur de l'arc auquel il appartient, puisque cette valeur y est exprimée par le nombre de degrés qui sert de titre à la page sur laquelle on trouve la valeur de ce sinus, & par le nombre de minutes qui est marqué dans cette même page, vis-à-vis de cette valeur (a). Mais pour trouver sans peine cette dernière valeur, il faut observer que si elle est au dessous de ce nombre 70710.68, on ne doit la chercher que sur les *verso* des feuillets de la Table; & que si elle est au contraire au dessus, on ne la trouvera que sur les *recto* des mêmes feuillets, & en allant dans un ordre retrogradé.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur de l'arc auquel appartient ce sinus, par exemple, 34147.34, on cherchera ce nombre dans les colonnes des sinus, sur les *verso* des feuillets de

(a) N. 20.

\dagger Comme un arc & le supplément de cet arc ont le même sinus, (b) la Table ne peut point faire connoître auquel des deux un sinus donné appartient. Ainsi l'on suppose que l'on sçait d'ailleurs si l'arc dont on cherche la valeur, est de plus ou de moins de 90 degrés.

la Table; & comme on le trouve vis-à-vis de 58 min. sur la page qui a pour titre 19 DEGRÉS, on connoîtra que le sinus donné appartient, ou à un arc de 19 deg. 58 min. ou au supplément de cet arc.

Mais si l'on veut connoître la valeur de l'arc auquel appartient cet autre sinus, par exemple 88444.53, on cherchera ce nombre dans les colonnes des sinus, sur les *recto* des feuillets de la Table; & comme on le trouvera vis-à-vis de 11 min. sur la page qui a pour titre 62 DEGRÉS, on connoîtra que cet autre sinus donné appartient, ou à un arc de 62 deg. 11 min. ou au supplément de cet arc.

En opérant de la même manière, on trouve que ce sinus, par exemple 39073.11, appartient à un arc de 23 deg. ou à son supplément; & que cet autre sinus, par exemple 84804.81, appartient à un arc de 58 deg. ou à son supplément.

Second Cas.

31. *Lorsque le Sinus donné ne se trouve point dans la Table.*

Si le sinus donné ne se trouve point dans la Table, alors on suppose par la même raison que l'on a dite au n°. 28, que les différences du sinus de la Table qui précède immédiatement le sinus donné, à ce même sinus donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, sont proportionnelles à celles des arcs auxquels ces sinus appartiennent. Ainsi, si

l'on fait une règle de proportion , dont le premier terme soit la différence des valeurs des deux sinus de la Table entre lesquels le sinus donné est immédiatement interposé; le deuxième , l'excès du sinus donné sur le sinus de la Table qui le précède immédiatement; & le troisième, 60 secondes: on pourra prendre le quatrième pour l'excès de l'arc demandé sur l'arc de la Table qui le précède immédiatement; & par conséquent, si l'on ajoute ce quatrième terme à ce dernier arc, la somme fera la valeur de l'arc demandé, ou celle du supplément de cet arc.

Ainsi, si l'on veut connoître la valeur de l'arc auquel appartient ce sinus , par exemple , 64997.14, on fera une règle de proportion , dont le premier terme sera la différence 2211. des deux sinus 64989.03. & 65011.14, entre lesquels le sinus donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table; le deuxième, l'excès 811. du sinus donné sur le sinus 64989.03. de la Table qui le précède immédiatement; & le troisième, 60 secondes. On ajoutera ensuite le quatrième terme 22 secondes de cette proportion à la valeur 40 deg. 32 min. de l'arc auquel appartient le sinus de la Table 64989.03, qui précède immédiatement le sinus donné; & la somme 40 deg 32 m. 22 sec. sera la valeur de l'arc demandé, ou celle du supplément de cet arc. Or il en est de même de tout autre exemple.

SECTION II.

DES TANGENTES.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine de la Table des Tangentes.

32. **O**UOIQU'UNE Table des Sinus suffise en rigueur pour résoudre tous les problèmes de la Trigonométrie; cependant, comme une pratique est d'autant plus parfaite, qu'elle est & plus simple & plus courte, on a examiné s'il ne seroit pas possible de résoudre encore ces mêmes problèmes par quelque autre voie; afin que dans les différents cas qui peuvent se rencontrer, on puisse choisir celle qui sera la plus abrégée. Or on a trouvé qu'il est possible de le faire, lorsque les triangles dont il s'agit sont rectangles; & par conséquent il l'est aussi, lorsqu'ils sont acutangles ou obtusangles, puisque l'on peut toujours former deux triangles rectangles avec un triangle quelconque, soit en prolongeant, s'il est nécessaire, l'un des côtés de ce triangle, & en abaissant une perpendiculaire à ce côté, du sommet de l'angle qui lui est opposé, soit d'une autre manière f.

33. EN EFFET, si après avoir élevé une perpendiculaire indéfinie A &c. à l'extrémité A du * Fig. 12.

† On peut en voir un exemple dans le livre suivant, au n^o.

(a) E. 1. 3.
p. 16.

rayon CA d'un cercle quelconque Z, & divisé en minutes & même en secondes le quart AH de la circonférence de ce cercle, on tire de son centre C par chaque point de sa division, des sécantes telles que CE, CD, CB, C&c. qui rencontrent en des points E, D, B, &c. cette perpendiculaire A &c. qui est une tangente au cercle Z (a), quelque triangle rectangle que l'on puisse imaginer; il sera équiangle à quel qu'un des triangles CAE, CAD, CAB, CA &c. qui seront formés par ce rayon CA, par l'une des tangentes AE, AD, AB, A&c. & par l'une des sécantes CE, CD, CB, C&c. Ainsi, si l'on avoit une Table des valeurs de toutes ces tangentes, & une autre des valeurs de toutes ces sécantes, c'est-à-dire, des Tables des valeurs des tangentes & des sécantes de tous les arcs AF, AG, AM, &c. du quart AH de la circonférence d'un cercle quelconque Z, dont on auroit supposé le rayon CA divisé en un certain nombre de parties égales, lorsque l'on connoîtroit la valeur de l'un quelconque I des angles aigus de quelque triangle rectangle I'K L que ce pût être; on trouveroit facilement celle de chaque côté d'un triangle CAD équiangle à ce triangle IKL; puisque le côté CA de ce triangle CAD seroit toujours ce rayon du cercle Z que l'on auroit déterminé, & qu'en cherchant dans ces Tables les valeurs de la tangente & de la sécante d'un arc qui seroit la mesure de cet angle I, on

on auroit les valeurs de la tangente AD & de la sécante CD de l'arc AG de ce même cercle, qui seroit la mesure d'un angle ACD égal à cet angle I: c'est-à-dire, les valeurs des côtés AC & CD de ce même triangle CAD; & par conséquent, si l'on connoissoit aussi l'un des côtés du triangle IKL; on trouveroit par la règle de proportion chacun de ses autres côtés (a).

(a) E. l. 6.

34. RECIPROQUEMENT, lorsque l'on connoitroit la valeur du côté AD de quelque triangle rectangle CAD que ce pût être, qui seroit décrit sur le rayon CA du même cercle précédent Z, ou celle de l'hypoténuse CD de ce même triangle, on trouveroit aussi, par le moyen de ces mêmes Tables, la valeur de chaque angle aigu I & L d'un triangle quelconque IKL qui seroit équiangle à ce triangle CAD; puisqu'en cherchant dans ces Tables de quel arc ce côté AD seroit la tangente, ou cette hypoténuse CD la sécante, on auroit la valeur de l'arc AG du cercle Z, qui seroit la mesure d'un angle ACD égal à l'angle I du triangle IKL; & que lorsque l'on connoît la valeur de l'un quelconque I des angles aigus de quelque triangle rectangle IKL que ce puisse être, on connoît aussi celle de l'autre angle aigu L de ce même triangle (b).

(b) E. l. 1.

35. Il s'agit donc de supposer que le rayon d'un cercle quelconque Z est divisé en un certain nombre de parties égales entr'elles, & de chercher ensuite le nombre de ces parties qui

P. 32.

34 *T R A I T E' C O M P L E T*

convient à la tangente & à la sécante de chaque arc du quart de la circonférence de ce cercle, depuis celles d'un arc d'une minute, ou même d'une seconde, jusqu'à celles d'un arc de 89 deg. 59 min. ou même de 89 d. 59 m. 59 sec. qui sont les plus grandes de toutes †, afin de construire une Table des valeurs de ces tangentes, & une autre des valeurs de ces sécantes, c'est-à-dire, des Tables des valeurs descôtés de tous les triangles rectangles qu'il est possible de décrire sur le rayon CA de ce cercle Z, & à quel qu'un desquels tel triangle rectangle que l'on puisse proposer, sera par conséquent équiangle. Mais, avant que d'examiner par quels principes on pourra résoudre ce problème, il faut remarquer :

36. PREMIEREMENT, que le nombre des parties égales, en lesquelles on doit supposer que le rayon CA est divisé, étant déjà déterminé (a) par la construction de la Table des sinus, on doit se servir de ce même nombre pour calculer la Table des tangentes & celle des sécantes, afin de conserver dans ces Tables les proportions qui se trouvent entre le sinus total & les tangentes de certains arcs, ou leurs sécantes, lorsque ces lignes sont calculées sur un même rayon.

37. SECONDEMENT, que les sécantes ne

† Si un arc étoit de 90 deg. sa tangente & sa sécante ne se détermineroient plus l'une l'autre, puisqu'elles seroient parallèles.

DE TRIGONOMETRIE. 35

contribuant en rien à rendre plus simples les calculs qu'il faut faire pour résoudre les problèmes de la Trigonométrie, il est inutile d'en construire une Table. D'ailleurs, la sécante CE^* Fig. 12a d'un arc AF étant toujours l'hypoténuse d'un triangle rectangle CAE , dont les autres côtés sont le sinus total CA & la tangente AE de ce même arc, il est facile d'en trouver la valeur (a) (a) E. l. 1. P. 47. lorsque l'on connoît celle de cette tangente.

38. TROISIÈMEMENT enfin, que suivant l'idée que l'on donne ici des tangentes (b) , on (b) N. 37 peut dire en général, que la Tangente d'un arc est une perpendiculaire au rayon de cet arc, qui est comprise entre l'extrémité commune de ce rayon & de cet arc, & une ligne droite tirée par le centre de ce même arc & par son autre extrémité.

COROLLAIRE I.

39. Il suit de cette définition, que la Tangente d'un arc & celle du supplément de ce même arc, sont égales.

La tangente AB^* de l'arc AF , & la tangente DE du supplément FD de ce même arc, sont égales. Fig. 13.

Démonstr. Dans les triangles ABC & DEC , le côté CA est égal au côté CD , puisque ces côtés sont rayons du même cercle Z ; l'angle ACB est égal à l'angle DCE (c) , puisque ces angles sont (c) E. l. 1. P. 15. opposés au sommet; & l'angle CAB est égal à l'angle CED , puisque ces angles qui sont formés par des tangentes & par des rayons, sont

36 TRAITE' COMPLEY

(a) E. 1. 3. des angles droits. (a). Donc le côté AB
 p. 16. est égal au côté DE (b); & par conséquent,
 (b) E. 1. 1, p. 26. puisque ce côté AB est la tangente de
 (c) N. 38. l'arc AF (c), & que ce côté DE est celle de
 (d) N. 38. l'arc FD (d) qui est le supplément de cet arc
 (e) N. 4. †. AF (e), la tangente de l'arc AF, & celle du
 supplément FD de ce même arc, sont égales.
 Donc C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

40. Il suit de la démonstration du corol-
 (f) N. 39. laire précédent (f), que la Sécante d'un arc &
 celle du supplément de ce même arc, sont éga-
 les.

SCHOLIE.

41. Lorsque l'on considère un arc de cercle
 Fig. 13. quelconque AF comme étant la mesure d'un angle
 ACB, au lieu de dire: la tangente AB de l'arc
 AF qui est la mesure de l'angle ACB, on dit
 seulement: la tangente AB de l'angle ACB.

CHAPITRE II.

Des Principes de la Construction d'une Table des Tangentes.

PROPOSITION I. Théorème.

42. **L**E Sinus du complément d'un arc de cer-
 cle quelconque, le Sinus de cet arc, son
 Rayon & sa Tangente sont proportionnels.

Fig. 14. Le sinus EG du complément EF de l'arc

AE, est au sinus ED de cet arc; comme le rayon CA du même arc, c'est-à-dire, le sinus total (a), est à la tangente AB de ce même arc. (a) N. 8.

Démonstr. L'angle CDE est droit (b), l'angle (b) N. 7. CGE l'est aussi par la même raison; & il en est de même de l'angle GCD, puisque l'arc AEF qui en est la mesure, est le quart de la circonférence d'un cercle (c). Ainsi le quadrilatère (c) N. 21. 7. CDEG est un parallélogramme (d); & par (d) E. 1. 1. conséquent (e) le sinus EG du complément EF ^{P. 28.} (e) E. 1. 2. de l'arc AE, est égal au côté CD du triangle ^{P. 34.} CDE. Or, ce triangle CDE & le triangle CAB sont équiangles (f), puisqu'ils sont rectangles, ^{(f) E. 1. 1. p. 32.} l'un en D (g) & l'autre en A (h); & que ^{(g) N. 7. (h) N. 38.} l'angle A C B leur est commun. Donc leurs ^{(i) E. 1. 6. P. 4.} côtés homologues sont proportionnels (i); & par conséquent, le côté CD, c'est-à-dire [D], le sinus du complément EF de l'arc AE, est au côté ED qui est le sinus de cet arc AE; comme le côté CA qui est le rayon ou le sinus total, est au côté AB qui est la tangente de ce même arc AE. Donc C, Q. F. D.

PROPOSITION II. Théorème.

43. Le rayon d'un cercle quelconque est moyen proportionnel entre la Tangente d'un arc quelconque de ce même cercle & celle du complément de cet arc.

La tangente AB* de l'arc AF, est au rayon CA * Fig. 15. de cet arc, c'est-à-dire, au sinus total; comme ce même rayon ou sinus total, est à la tangente DE du complément DF de ce même arc.

Démonstr. Les triangles CAB & EDC sont
 (a) E. 1. 1. équiangles (a), puisqu'ils sont rectangles, l'un
 P. 32. (b) N. 38. en A & l'autre en D (b), & que les angles ABC
 & DCE, qui sont les angles alternes formés
 (c) N. 21. † par les parallèles AB & DC (c), sont égaux (d).
 (d) E. 1. 1. Donc ces triangles ont leurs côtés homo-
 P. 29. logues proportionnels (e); & par conséquent,
 (e) E. 1. 6. le côté AB qui est la tangente de l'arc AF, est
 P. 4. au côté CA qui est le rayon de cet arc, c'est-
 à-dire, le sinus total; comme le côté DC qui
 est aussi le rayon du même arc, & par consé-
 quent aussi le sinus total est au côté DE, qui est la
 tangente du complément DF de ce même arc.
 Donc C. Q. F. D.

CHAPITRE III.

De la Manière de construire une Table des Tangentes.

44. **L**ORSQUE l'on veut construire une
 Table des tangentes, on commence
 par chercher la valeur de la tangente de l'arc
 (N. 42.) d'une minute; en faisant (f) une règle de pro-
 portion, à laquelle on donne pour premier ter-
 me, le sinus 99999.99. du complément 89 deg.
 59 min. de cet arc; pour second terme, le
 sinus 29.09. de ce même arc; & pour troi-
 sième terme, le sinus total 100000.00: & le
 quatrième terme de cette proportion que l'on
 trouve de 29.09 parties, telles que le rayon

le sinus total en contient 10000000. est cette valeur demandée. On cherche ensuite de la même manière la valeur de la tangente de l'arc de 2 min. celle de la tangente de l'arc de 3 min. & ainsi de suite, jusqu'à celle de la tangente de l'arc de 45 deg. inclusivement. Or, à mesure que l'on trouve ces valeurs, on les écrit chacune vis-à-vis de l'arc auquel elle appartient, dans les colonnes qui sont à côté de celles des sinus, & au haut desquelles on met ce titre, *Tangentes* †.

45. ON continueroit à chercher les valeurs des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. de la même manière dont on vient de chercher celles des tangentes des arcs qui sont au dessous de ce nombre, si l'on faisoit entrer dans les calculs que l'on est obligé de faire pour trouver ces valeurs, les restes des divisions & des extractions de racines que l'on a faites pour avoir les valeurs des cordes de ces mêmes arcs. Mais, comme on a négligé ces restes, la perte que l'on fait sur les deux premiers des trois sinus qui servent à trouver les valeurs des tangentes, causeroit une erreur trop considérable, lorsqu'il s'agiroit des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. parce que les différences des tangentes sont d'autant plus grandes, que les tangentes appartiennent à de plus grands arcs. Ainsi, pour avoir les valeurs des tangentes de ces derniers

† Voyez la première des Tables qui sont à la fin de ce Traité.

40 TRAITÉ COMPLET

arcs, on se sert du principe *l'établi* au n°. 43, parce qu'en le suivant, on ne perd que sur le premier des trois nombres que l'on emploie pour trouver ces valeurs, & que cette perte ne cause qu'une erreur peu sensible.

46. PAR CONSÉQUENT, pour trouver la valeur de la tangente de l'arc de 45 deg. 1 min. on fait
 (a) N. 43. (a) une règle de proportion, à laquelle on donne pour premier terme, la tangente 99941.48. du complément 44 deg. 59 min. de cet arc; pour second terme, le sinus total 100000.00; & pour troisième terme, le même sinus total 100600.00; & le quatrième terme de cette proportion que l'on trouve de 100058.19 parties, telles que le sinus total en contient 10000000, est cette valeur demandée. On cherche ensuite de la même manière la valeur de la tangente de l'arc de 45 deg. 2 min. celle de la tangente de l'arc de 45 d. 3 m. & ainsi de suite jusqu'à celle de la tangente de l'arc de 89 deg. 59 m. laquelle on trouve de 3437746.67 parties. Or, à mesure que l'on trouve ces valeurs, on les écrit dans les colonnes des tangentes, chacune vis-à-vis de l'arc auquel elle appartient, de même que l'on a écrit les précédentes; & la Table des tangentes est construite.

SCHOLIE.

47. On met aussi un point dans cette Table avant les deux derniers des chiffres qui expriment les valeurs des tangentes, pour les mêmes raisons que l'on a dites à la scholie du n°. 22.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

*De la manière de se servir de la Table
des Tangentes.*

48. **O**N se sert de la Table des tangentes, de la même manière dont on a dit qu'il falloit se servir de celle des sinus (a). Mais (a) N. 33. il faut remarquer que dans les cas auxquels l'arc donné où la tangente donnée ne se trouvent point dans cette Table, on ne peut connaître ni la valeur de cette tangente, ni celle de cet arc, avec autant de précision que lorsqu'il s'agit des sinus; parce que les différences des tangentes étant beaucoup plus grandes que celles des sinus, principalement lorsque les arcs auxquels ces tangentes appartiennent, sont de plus de 45 deg. on ne peut point, sans quelque erreur, les supposer proportionnelles à celles de ces arcs.

SECTION III.

DES LOGARITHMES.

49. **O**N ne se servoit autrefois que de la Table des sinus & de celle des tangentes, pour résoudre les problèmes de la Trigonométrie. Mais depuis que le Baron Neper Écossais a inventé les *Logarithmes*, ces Tables

ne sont plus guères en usage; parce que ces nouveaux nombres abbrevient considérablement les calculs, lorsque les nombres sur lesquels on est obligé d'opérer sont considérables. Ainsi, il s'agit de traiter des Logarithmes.

CHAPITRE PREMIER.

De l'Origine de la Table des Logarithmes.

50. **O**N appelle *première puissance* d'un nombre quelconque, ce nombre même; *seconde puissance* d'un nombre, le produit de la première puissance de ce nombre, multipliée une fois par elle-même; *troisième puissance* d'un nombre, le produit de sa première puissance, multipliée deux fois par elle-même, c'est-à-dire, le produit de la seconde puissance de ce nombre, multipliée par sa première puissance; *quatrième puissance* d'un nombre, le produit de sa première puissance, multipliée trois fois par elle-même, c'est-à-dire, le produit de la troisième puissance de ce nombre, multipliée par sa première puissance; & ainsi de suite. Et l'on nomme *Exposant* ou *Logarithme* d'un nombre quelconque, le nombre qui exprime le *degré* de puissance de ce nombre quelconque; c'est-à-dire, quelle puissance ce nombre quelconque est d'un autre nombre.

Ainsi, la première puissance, par exemple, du nombre 3, est 3; la seconde puissance de ce même nombre, est 3 fois 3, ou 9; la troisième puissance est 3 fois 9, ou 27; la quatrième puissance est 3 fois 27, ou 81; &c. ainsi de suite. Et le nombre 1 qui exprime que 3 est la première puissance du nombre, s'appelle le

PUISSANCES.	EXPOSANS OU LOGARITHMES.
3	1
9	2
27	3
81	4
243	5
729	6
2187	7
6561	8
19683	9
59049	10
177147	11
531441	12
1594323	13
4782969	14
14348907	15
&c.	&c.

Logarithme de 3; le nombre 2 qui exprime que 9 est la seconde puissance du nombre 3, se nomme le Logarithme de 9; le nombre 3 qui exprime que 27 est la troisième puissance du nombre 3, s'appelle, &c. &c. ainsi de suite.

§ 1. Donc, à mesure que l'on eleve un nombre quelconque à différens degrés de puissance, par la multiplication successive de sa première puissance, on forme les logarithmes de ces nouvelles puissances, en ajoutant successivement à lui-même le logarithme de cette pre-

mière puissance. A mesure au contraire que l'on abaisse une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, en la divisant successivement par la première puissance de ce même nombre; on diminue successivement le logarithme de cette puissance quelconque, par la soustraction du logarithme de cette même première puissance, pour avoir les logarithmes des quotiens. Et par conséquent, autant de fois que l'on multiplie une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la première puissance de ce nombre, pour produire une certaine puissance de ce même nombre; autant de fois on ajoute à lui-même le logarithme de cette même première puissance, pour former celui de cette certaine puissance. Autant de fois au contraire que l'on divise une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la première puissance de ce nombre, pour abaisser cette puissance quelconque à une certaine puissance; autant de fois on retranche du logarithme de cette même puissance quelconque, celui de cette première puissance, pour avoir le logarithme du quotient.

§ 2. Mais, selon les principes du calcul : PREMIEREMENT, c'est la même chose de multiplier d'abord un nombre quelconque par un autre nombre; de multiplier ensuite le produit encore par un autre nombre; & ainsi de suite : ou de multiplier tout-d'un-coup ce premier nombre, par le produit de tous ces autres nombres. C'est aussi la même chose d'ajouter

d'abord à un nombre quelconque un autre nombre; d'ajouter ensuite à la somme encore un autre nombre; & ainsi de suite: ou d'ajouter tout-d'un-coup à ce premier nombre la somme de tous ces autres nombres. Donc, au lieu de multiplier d'abord une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la première puissance de ce nombre; de multiplier ensuite le produit encore par cette première puissance; & ainsi de suite un certain nombre de fois: on peut multiplier tout-d'un-coup cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par une puissance de ce même nombre, qui soit d'un degré égal à ce certain nombre de fois. Et pour avoir le logarithme du produit, au lieu d'ajouter d'abord au logarithme de cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, celui de la première puissance de ce nombre; d'ajouter ensuite à la somme encore le logarithme de cette première puissance; & ainsi de suite, autant de fois qu'il faudroit multiplier cette puissance quelconque, par cette première puissance, pour avoir ce produit: on peut ajouter tout-d'un-coup au logarithme de cette même puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, le logarithme de la puissance de ce même nombre, qui est d'un degré égal à ce certain nombre de fois. Et par conséquent, on peut dire généralement que:

53. *Le produit de deux puissances quelcon-*

ques de tel nombre que ce puisse être, multipliées l'une par l'autre, & toujours pour logarithme la somme des logarithmes de ces deux puissances.

Ainsi le produit, par exemple 531441 . de la cinquième puissance 243 . du nombre 3 , multipliée par la septième puissance 2187 . de ce même nombre, a pour logarithme la somme 12 . des logarithmes 5 . & 7 . de ces deux puissances. Et il en est de même de tout autre exemple.

§ 4. SECONDEMENT, c'est la même chose de diviser d'abord un nombre quelconque par un autre nombre; de diviser ensuite le quotient encore par un autre nombre; & ainsi de suite: ou de diviser tout-d'un-coup ce premier nombre, par le produit de tous ces autres nombres. C'est aussi la même chose de retrancher d'abord d'un nombre quelconque, un autre nombre; de retrancher ensuite du reste encore un autre nombre; & ainsi de suite: ou de retrancher tout-d'un-coup de ce premier nombre la somme de tous ces autres nombres. Donc, au lieu de diviser d'abord une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par la première puissance de ce nombre; de diviser ensuite le quotient encore par cette première puissance; & ainsi de suite un certain nombre de fois: on peut diviser tout-d'un-coup cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, par une puissance de ce même nombre, qui soit d'un degré égal à ce certain nom-

bre de fois. Et pour avoir le logarithme du quotient, au lieu de retrancher d'abord du logarithme de cette puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, celui de la première puissance de ce nombre; de retrancher ensuite du reste encore le logarithme de cette première puissance; & ainsi de suite, autant de fois qu'il faudroit diviser cette puissance quelconque par cette première puissance, pour avoir ce quotient: on peut retrancher tout-d'un-coup du logarithme de cette même puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, celui de la puissance de ce même nombre, qui est d'un degré égal à ce certain nombre de fois. Et par conséquent, on peut aussi dire généralement que :

§ 5. *Le quotient d'une puissance quelconque de tel nombre que ce puisse être, divisée par une autre puissance quelconque de ce même nombre, a toujours pour logarithme la différence des logarithmes de ces deux puissances.*

Ainsi le quotient, par exemple 243. de la douzième puissance 531441. du nombre 3, divisée par la septième puissance 2187. de ce même nombre, a pour logarithme la différence 5. des logarithmes 12. & 7. de ces deux puissances. Et il en est aussi de même de tout autre exemple.

§ 6. AINSI, si l'on avoit une Table de toutes †

† C'est - à - dire, jusqu'à un degré qui produise un nombre médi duquel on ne compte ordinairement plus; car si on l'en-

les puissances d'un nombre quelconque, dans laquelle les logarithmes de ces puissances seroient écrits, chacun vis-à-vis de la puissance à laquelle il appartiendrait; lorsque l'on connoîtroit deux quelconques de ces puissances, on trouveroit leurs logarithmes par le moyen de cette Table. Et lorsqu'on les auroit trouvés, on connoîtroit, par le moyen de l'addition, le produit de ces deux puissances; puisqu'en ajoutant l'un à l'autre ces deux logarithmes, & en cherchant ensuite dans cette même Table le nombre auquel leur somme appartiendrait, c'est-à-dire, de quelle puissance cette somme seroit le logarithme, on trouveroit ce produit

- (a) N. 53. vis-à-vis de cette somme (a). On connoîtroit au contraire, par le moyen de la soustraction, le quotient de l'une de ces mêmes puissances, divisée par l'autre; puisqu'en retranchant du logarithme de la puissance qui devoit être divisée, celui de la puissance qui devoit diviser, & en cherchant ensuite dans la Table le nombre auquel la différence appartiendrait, c'est-à-dire, de quelle puissance cette différence seroit le logarithme, on trouveroit ce quotient
- (b) N. 55. vis-à-vis de cette différence (b) †.

tendoit autrement, cette Table ne seroit pas possible; puisque la multitude des puissances d'un nombre étant infinie, la Table de ces puissances le seroit aussi.

- † Les Logarithmes abrègent considérablement les calculs, comme on l'a déjà dit (c); puisqu'ils convertissent la multiplication en addition, & la division en soustraction; & que l'on a plutôt fait une addition qu'une multiplication, & une soustraction qu'une division. Mais il faut observer de ne s'en servir que

57. IL s'agit donc de prendre un nombre à volonté, de former ensuite les puissances de ce nombre jusqu'à un certain degré, & de chercher enfin les logarithmes de ces puissances; afin de construire une Table & de ces puissances & de ces logarithmes. Mais si l'on ne comprendroit dans cette Table que les puissances ordinaires d'un nombre quelconque (c'est-à-dire, les puissances entières, telles que nous venons de les proposer (a) pour exemple) & les loga- (a) N. 50. rithmes de ces puissances ordinaires, cette Table ne seroit pas d'une grande utilité; puisque aucun des nombres interpolés entre ces puissances, ni par conséquent les logarithmes de ces nombres, ne s'y trouveroient. Ainsi, avant que d'entreprendre d'en construire une, il faut déduire de l'idée que nous venons de donner des logarithmes en général, quelques principes, par le moyen desquels on puisse: PREMIÈREMENT, faire entrer dans une Table des logarithmes, ceux de tous les nombres entiers, depuis le logarithme de l'unité, jusqu'à celui du nombre 10000, au moins; ce qui fait l'étendue des Tables ordinaires: SECONDEMENT, augmenter cette Table autant que l'on en aura besoin; c'est-à-dire, trouver le logarithme d'un nombre quelconque

lorsqu'on est obligé d'opérer sur de très-grands nombres; parce qu'autrement, loin de rendre les opérations plus courtes, ils ne feroient que les allonger par le temps qu'il faut employer à chercher dans la Table le logarithme d'un nombre, & le nombre auquel un logarithme appartient; & par les calculs qu'il faut faire pour connaître & ce logarithme & ce nombre, lorsqu'ils ne sont point dans la Table.

50. *TRAITE' COMPLET*
plus grand que 10000; & réciproquement, le
nombre auquel appartient un logarithme quel-
conque plus grand que celui du nombre 10000 =
TROISIÈMEMENT enfin, trouver par le moyen de
cette même Table, les logarithmes des nombres
fractionnaires, lesquels nombres n'y sont point
compris.

CHAPITRE II.

Des Principes de la Construction d'une Table des Logarithmes.

PROPOSITION I. Théorème.

58. *UN nombre quelconque a pour loga-*
rithme tel nombre que l'on veut; lors-
que l'on ne considère point ce premier nombre,
comme étant une puissance d'un autre nombre
dont le logarithme est déterminé.

Démonstr. Le logarithme d'un nombre quel-
 conque, est le nombre qui exprime le degré de
 (a) N. 50. puissance de ce premier nombre (a). Or, un
 nombre quelconque a tel degré de puissance
 que l'on veut, puisque l'on peut toujours le
 considérer comme n'étant point un produit; &
 (b) N. 50. qu'alors il est une puissance du premier degré (b):
 ou comme étant un produit de sa racine du de-
 gré dont on veut qu'il soit une puissance, multi-
 pliée par elle-même, autant de fois qu'il est

nécessaire pour produire cette puissance, soit que cette racine soit commensurable, soit qu'elle soit incommensurable; & qu'alors il est une puissance de ce degré que l'on veut. Ainsi ce nombre, par exemple 64, peut être considéré comme n'étant point un produit; & alors il est une puissance du *premier degré* (a): ou (a) N. 50. comme étant un produit de sa racine seconde, laquelle est 8, multipliée une fois par elle-même; & alors il est une puissance du *second degré* (b): ou comme étant un produit de sa racine troisième, laquelle est 4, multipliée deux fois par elle-même; & alors il est une puissance du *troisième degré* (c): ou comme étant un produit de sa racine quatrième, laquelle est incommensurable, multipliée trois fois par elle-même; & alors il est une puissance du *quatrième degré* (d); & ainsi de suite. Donc, lorsqu'on (d) N. 50. veut que le degré de puissance d'un nombre quelconque, soit exprimé par un certain nombre, il n'y a qu'à considérer ce nombre quelconque comme étant une puissance du degré exprimé par ce certain nombre. Et comme ce certain nombre peut être tel nombre que l'on veut, on peut exprimer le degré de puissance d'un nombre quelconque par tel nombre que l'on veut; & par conséquent, un nombre quelconque, considéré comme il est dit dans l'hypothèse, a pour logarithme tel nombre que l'on veut.

PROPOSITION II. Théorème.

59. *L'unité a 0 pour logarithme, lorsqu'on la considère comme étant une puissance d'un nombre quelconque dont le logarithme est déterminé.*

Démonstr. Le quotient d'un nombre quelconque divisé par un autre, a pour logarithme la différence des logarithmes de ces deux nombres (a). Ainsi, le quotient d'un nombre quelconque divisé par lui-même, a pour logarithme la différence du logarithme de ce nombre au logarithme de ce même nombre. Or, la différence du logarithme d'un nombre quelconque au logarithme de ce même nombre, est 0. Donc, le quotient d'un nombre quelconque divisé par lui-même, a 0 pour logarithme ; & par conséquent, puisque l'unité est le quotient d'un nombre quelconque divisé par lui-même, l'unité considérée comme il est dit dans l'hypothèse, a 0 pour logarithme.

PROPOSITION III. Théorème.

60. *La seconde puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme le double de celui de ce même nombre.*

Démonstr. Le produit d'un nombre quelconque multiplié par un autre, a pour logarithme la somme des logarithmes de ces deux nombres (b). Or, la seconde puissance d'un nombre quelconque, est le produit de ce nombre quelconque multiplié par lui-même (c). Donc, la

seconde puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme deux fois le logarithme de ce même nombre; & par conséquent, le double de ce logarithme.

COROLLAIRE.

61. Il suit de ce théorème, que *la racine seconde d'un nombre quelconque, a pour logarithme la moitié de celui de ce même nombre.*

PROPOSITION IV. Théorème.

62. *La troisième puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme le triple de celui de ce même nombre. Et ainsi de suite.*

Démonstr. Par une conséquence du N°. 53, le produit d'un nombre quelconque multiplié par d'autres nombres, a pour logarithme la somme du logarithme de ce nombre quelconque & des logarithmes de ces autres nombres. Or, la troisième puissance d'un nombre quelconque, est le produit de ce nombre multiplié deux fois par lui-même (a). Donc, la troi- (a) N. 50.
sième puissance d'un nombre quelconque, a pour logarithme trois fois le logarithme de ce même nombre; & par conséquent, le triple de ce logarithme. Et ainsi de suite.

COROLLAIRE.

63. Il suit de ce théorème, que *la racine troisième d'un nombre quelconque, a pour logarithme le tiers de celui de ce même nombre. Et ainsi de suite.*

CHAPITRE III.

De la Manière de construire une Table des Logarithmes.

64. **L**ORS QUE l'on veut construire une Table des logarithmes, on commence par faire un cayer qui contienne 50 feuillets, dont chacun soit divisé de part & d'autre en huit colonnes de différentes largeurs; de la même manière dont la seconde des Tables qui sont à la fin de ce Traité, & que l'on donne pour exemple, est divisée. On écrit ensuite en titre les nombres suivans, sçavoir, 100. sur le *verso* du premier feuillet; 200. sur le *recto* du second; 300 sur le *verso* du même second feuillet; 400. sur le *recto* du troisième; & ainsi de suite, jusqu'à ce nombre 9900. qui se rencontre sur le *verso* du 51^e. On écrit aussi de même en titre, *Nombres naturels*, au haut de la première colonne de chaque page, de la quatrième & de la septième; & *Logarithmes*, au haut de la seconde colonne, de la cinquième & de la huitième. Enfin on écrit de suite, & en allant du haut de chaque colonne au bas, les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. jusqu'à 10000, dans les colonnes qui leur sont destinées; de manière qu'il y en ait 34. dans la première colonne de chaque page, 33. seulement dans chacune des deux autres, & par conséquent, 100. dans chaque page.

65. Le cayer étant ainsi préparé, il s'agit de trouver les logarithmes de tous les nombres qui y sont marqués; afin de les écrire dans les colonnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre naturel auquel il appartient. Mais avant que d'en entreprendre la recherche, il faut observer:

66. PREMIEREMENT, que quoiqu'il soit libre (a) de choisir tel nombre que l'on veut, pour (a) N. 57. être le nombre *absolu* (c'est-à-dire, celui dont le logarithme doit déterminer les logarithmes de tous les autres nombres) & de donner pour logarithme à ce premier nombre, aussi tel nombre que l'on veut (b); cependant la facilité avec (b) N. 58. laquelle on multiplie & l'on divise un nombre quelconque par un nombre décimal, doit toujours engager à en prendre un par préférence à tout autre nombre, pour être ce premier nombre; de même que celle avec laquelle on ajoute à un nombre quelconque, & l'on retranche d'un nombre quelconque un nombre décimal, doit aussi déterminer à en donner un pour logarithme à ce même premier nombre.

D'ailleurs, en prenant 10. qui est le premier des nombres décimaux, pour être ce nombre absolu, & en lui donnant pour logarithme aussi un nombre décimal quelconque; le nombre des chiffres par lequel ce nombre 10. est exprimé, surpassera d'une unité la *Caractéristique* † de son

† On appelle *Caractéristique* d'un logarithme quelconque, le premier chiffre à main gauche de ce logarithme, lorsqu'il s'agit

logarithme. Or, à mesure que selon les principes du calcul on ajoutera un 0 aux chiffres de ce nombre 10, pour l'élever à ses différentes puissances ordinaires, & que par conséquent on augmentera d'une unité le nombre de ses chiffres; il faudra en même temps, pour former les logarithmes de ces différentes puissances, ajouter à lui-même le logarithme de ce même

- (*) N. 51. nombre 10 (a); & par conséquent augmenter aussi d'une unité la caractéristique de son logarithme. Ainsi le nombre des chiffres de chacune des puissances ordinaires de ce nombre 10, surpassera aussi d'une unité la caractéristique du logarithme de cette puissance. Mais, par une propriété de la numération, tous les nombres entiers qui sont compris entre l'unité & le nombre 10, sont exprimés par un seul chiffre: tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 10. & la seconde puissance 100, sont exprimés par deux chiffres: tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 100. & la troisième puissance 1000. du même nombre 10, sont exprimés par trois chiffres; & ainsi de suite. Par la nature des logarithmes, ceux de tous les nombres entiers qui sont compris entre l'unité & le

d'une puissance du nombre absolu, qui est au dessous de la dixième; & le nombre qui résulte de l'addition successive de l'unité à ce premier chiffre, lorsqu'il est question d'une puissance de ce même nombre absolu, qui est la dixième ou au dessus. Dans la Table, on la sépare par un point, des autres chiffres avec lesquels elle exprime un logarithme.

nombre

nombre 10, sont renfermés entre le logarithme de l'unité & celui du nombre 10 : ceux de tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 10. & sa seconde puissance 100, sont renfermés entre le logarithme du nombre 10. & celui de cette seconde puissance 100 : ceux de tous les nombres entiers qui sont compris entre le nombre 100. & la troisième puissance 1000. du même nombre 10. sont renfermés entre le logarithme du nombre 100. & celui de cette troisième puissance 1000 ; & ainsi de suite. Enfin, par rapport au nombre décimal que l'on aura donné pour logarithme au nombre 10, tous les nombres entiers qui seront compris entre le logarithme de l'unité & celui du nombre 10, & par conséquent tous les logarithmes qui seront renfermés entre ces deux logarithmes, auront un 0 pour caractéristique, c'est-à-dire, pour premier chiffre à main gauche, lorsqu'ils seront exprimés par un même nombre de chiffres que le logarithme du nombre 10 : tous les nombres entiers qui seront compris entre le logarithme du nombre 10. & celui de la seconde puissance 100. de ce nombre 10, & par conséquent tous les logarithmes qui seront renfermés entre ces deux logarithmes, auront chacun le nombre 1 pour caractéristique : tous les nombres entiers qui seront compris entre le logarithme du nombre 100. & celui de la troisième puissance, 1000. du même nombre 10, & par conséquent tous

les logarithmes qui seront renfermés entre ces deux logarithmes, auront chacun le nombre 2 pour caractéristique; & ainsi de suite. Donc, *le nombre des chiffres par lesquels un nombre entier quelconque sera exprimé, surpassera toujours d'une unité la caractéristique de ce nombre entier.* Et par conséquent, on connoîtra toujours par la caractéristique d'un logarithme quelconque, le nombre des chiffres que doit avoir le nombre naturel auquel ce logarithme appartient.

67. SECONDEMENT, que comme on sera souvent obligé d'ajouter ensemble deux des logarithmes trouvés, & de prendre la moitié de leur somme, pour connoître les logarithmes des nombres qui ne sont point des puissances entières du nombre absolu, on doit prendre un très-grand nombre pour être le logarithme de ce nombre absolu; afin que les logarithmes n'étant exprimés que par des nombres composés d'une grande multitude d'unités, les parties d'une unité qui resteront, lorsque les sommes dont il faudra prendre les moitiés, deviendront des nombres impairs, soient si peu de chose par rapport à ces grands nombres, que l'on puisse les négliger sans aucune conséquence.

68. CECI POSE', si l'on veut trouver les logarithmes de tous les nombres qui sont marqués dans le cayer, on commencera, conformément à

(a) N. 66.

67.

ce qui vient d'être dit (a), par prendre le nombre 10. pour être le nombre absolu, & par lui

Donner pour logarithme un très-grand nombre décimal, par exemple, 1.000000000 †. Or, si l'on donne ce nombre 1.000000000. pour logarithme au nombre 10, le logarithme de la seconde puissance 100. de ce nombre 10. sera 2.000000000. (a); celui de la troisième puissance 1000, sera 3.000000000. (b); & (b) N. 62. celui de la quatrième puissance 10000, sera 4.000000000. (c). Ainsi, l'on écrira ces logarithmes dans les colonnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre naturel auquel il appartient. Et comme le logarithme de l'unité est toujours 0 (d), quels que (d) N. 59. soient les logarithmes des autres nombres, on écrira aussi 0.000000000. vis-à-vis de l'unité, pour en être le logarithme.

69. APRES avoir ainsi trouvé & écrit dans l'échelle les logarithmes des puissances ordinaires du nombre 10, on cherchera le logarithme du nombre 2. de la manière suivante, qui servira en même temps d'exemple de la méthode que l'on doit suivre pour trouver les logarithmes de tous les autres nombres.

Premièrement, on extraira la racine seconde du nombre 10. Mais comme ce nombre n'est point une seconde puissance parfaite, on commencera par lui ajouter quatorze zéros, c'est-à-dire, par le multiplier par cent trillions; & par ce moyen, on trouvera ce nombre

† Ce logarithme est dix fois plus grand que celui des Tableaux précédents.

$3 \cdot \frac{1632776}{10000000}$ pour la racine seconde approchée. Or, cette racine approchée peut être prise sans erreur pour la vraie, puisqu'elle n'en diffère pas de la dix - millionième partie d'une unité, comme on le prouve en élevant cette racine approchée à sa seconde puissance, ce qui produit un nombre moins grand que 10, & en élevant ensuite cette autre racine $3 \cdot \frac{1632777}{10000000}$ aussi à la seconde puissance, ce qui produit un nombre plus grand que 10. Ainsi, puisque ce nombre $3 \cdot \frac{1632776}{10000000}$, peut être pris pour la racine seconde de 10. dont le logarithme a été déterminé de

(*) N. 68. 1.00000000. d'unités (a), le logarithme de

(*) N. 61. cette racine seconde, sera de 0.50000000. (b).

Secondement, comme cette racine $3 \cdot \frac{1632776}{10000000}$ est plus grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme, on extraira aussi la racine seconde de cette racine, après l'avoir multipliée par cent trillions, comme on a fait au nombre 10, & par la même raison; & l'on trouvera ce nombre $1 \cdot \frac{7782793}{100000000}$ pour cette racine seconde approchée,

(*) N. 61. dont le logarithme sera de 0.25000000. (c), puisque celui de $3 \cdot \frac{1632776}{10000000}$ est de 0.50000000. suivant ce qui vient d'être dit. Mais cette racine est moins grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme. Ainsi ce nombre est interposé entre la racine précédente $3 \cdot \frac{1632776}{10000000}$ & cette dernière $1 \cdot \frac{7782793}{100000000}$; & par conséquent son logarithme est aussi interposé entre les logarithmes 0.50000000. & 0.25000000. de ces deux racines.

DE TRIGONOMETRIE. 61

Troisièmement, comme le nombre 2. dont on cherche le logarithme, est interposé entre ces deux racines $3. \frac{1612776}{10000000}$ & $1. \frac{7782793}{10000000}$, on les multipliera l'une par l'autre, & l'on aura ce produit $3. \frac{1241279691168}{10000000000000}$, dont le logarithme sera la somme 0.75000000. des logarithmes de ces deux mêmes racines (a). On extraira ensuite la racine seconde de ce produit, après l'avoir aussi multiplié par cent trillions, comme on a fait aux nombres précédents, & comme on observera de le faire toujours dans la suite, par les mêmes raisons; & l'on trouvera ce nombre $2. \frac{1713716}{10000000}$ pour cette racine seconde approchée, dont le logarithme sera de 0.37500000. (b), puisque (b) N. 62. celui du produit $3. \frac{1241279691168}{10000000000000}$ est de 0.75000000, comme on vient de le dire. Mais cette racine est plus grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme. Ainsi ce nombre est à présent interposé entre la racine précédente $1. \frac{7782793}{10000000}$ & cette dernière $2. \frac{1713716}{10000000}$; & par conséquent son logarithme est aussi interposé entre les logarithmes 0.25000000. & 0.37500000. de ces deux racines.

Quatrièmement, comme le nombre 2. dont on cherche le logarithme, est à présent interposé entre ces deux racines $1. \frac{7782793}{10000000}$ & $2. \frac{1713716}{10000000}$, on les multipliera l'une par l'autre, & l'on aura ce produit $4. \frac{1341279691168}{10000000000000}$, dont le logarithme sera la somme 0.62500000 des logarithmes de ces deux mêmes racines (c). On extraira ensuite (c) N. 53. la racine seconde de ce produit, après l'avoir

62 TRAITE COMPLET

multiplié par cent trillions, comme on a déjà dit qu'il falloit toujours le faire; & l'on trouvera ce nombre $2.\frac{0511749}{1000000}$ pour cette racine seconde approchée, dont le logarithme sera de (a) N. 61. 0.31250000 (a), puisque celui du produit $4.\frac{21690438544098}{100000000000000}$ est de 0.62500000 , comme on vient de le dire. Mais cette racine est plus grande que le nombre 2. dont on cherche le logarithme; ainsi ce nombre est à présent interposé encore entre la racine précédente $1.\frac{7762791}{10000000}$ & cette dernière $2.\frac{0511749}{1000000}$; & par conséquent son logarithme est aussi interposé entre les logarithmes 0.25000000 & 0.31250000 de ces deux racines.

Cinquièmement enfin, on continuera à multiplier toujours l'une par l'autre (comme on vient de le faire, & comme on le voit à la troisième des Tables qui sont à la fin de ce Traité) les deux racines entre lesquelles le nombre 2. se trouvera successivement interposé; à extraire ensuite la racine seconde du produit, toujours après l'avoir multiplié par cent trillions; & à prendre le logarithme de cette racine seconde approchée, jusqu'à ce que l'on soit enfin parvenu à renfermer le logarithme que l'on cherche, entre deux logarithmes qui ne different plus que de deux \dagger unités; & par conséquent, à

\dagger On ne parvient quelquefois qu'à des logarithmes qui different de trois unités: mais cela revient au même que s'ils ne différoient que de deux; parce que, comme on ne prend que des nombres entiers pour logarithmes, ces différences 3 & 2 donnent pareillement 1 pour leurs moitiés.

connoître ce logarithme ; puisque ne pouvant y avoir qu'un seul nombre entier d'interposé entre deux nombres qui ne diffèrent que de deux unités, le nombre entier qui sera interposé entre ces deux derniers logarithmes, ne pourra être que ce logarithme cherché.

70. Or, ce n'est qu'en 25 opérations que l'on parvient dans cet exemple à rencontrer ces deux logarithmes qui ne diffèrent plus que de deux unités; parce que c'est en prenant successivement les moitiés des sommes des logarithmes entre lesquels le logarithme que l'on cherche est interposé, que l'on resserre de plus en plus ce logarithme entre des bornes étroites; & que la différence 1 00000000. des logarithmes 0.00000000. & 1.00000000, entre lesquels le logarithme que l'on cherche est d'abord interposé, ne se trouve réduite à cette différence 2, qu'après en avoir pris la moitié de la moitié de la moitié, & ainsi de suite, jusqu'à 25 fois.

71. Le logarithme du nombre 2. étant ainsi connu, on trouvera (a) les logarithmes de toutes les puissances ordinaires 4, 8, 16, 32, &c. (a) N. 60.
& 62. de ce nombre 2. On cherchera ensuite (b) ceux (b) N. 53. des produits 20, 40, 80, 160, &c. 200, 400, 800, &c. 2000, 4000 & 8000. des nombres 10, 100. & 1000. multipliés par ce même nombre 2; & à mesure que l'on trouvera ces logarithmes, on les écrira dans les colonnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra.

72. ON cherchera ensuite le logarithme du nombre 3. de la même manière dont on vient
 (a) N. 69. de s'y prendre (a) pour trouver celui du nombre 2 ; & lorsque l'on connoîtra ce logarithme , on
 (b) N. 60. trouvera (b) les logarithmes de toutes les puissances ordinaires 9, 27 , 81 , &c. de ce nombre
 & 62.
 (c) N. 53. bre 3. On cherchera ensuite (c) ceux de tous les produits de ce même nombre 3. multiplié par chacun des nombres naturels dont les logarithmes seront déjà connus ; & à mesure que l'on trouvera ces logarithmes , on les écrira dans les colonnes qui leur sont destinées , chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra.

73. ON connoîtra ensuite le logarithme du
 (d) N. 55. nombre 5. (d), en retranchant le logarithme du nombre 2. de celui du nombre 10 ; & lorsque
 (e) N. 60. l'on aura ce logarithme , on trouvera (e) les logarithmes de toutes les puissances ordinaires
 & 62. 25 , 125 , 725 , &c. de ce nombre 5. On cher-
 (f) N. 53. chera ensuite (f) ceux de tous les produits de ce même nombre 5. multiplié par chacun des nombres naturels dont les logarithmes seront déjà connus ; & à mesure que l'on trouvera ces logarithmes , on les écrira aussi dans les colonnes qui leur sont destinées , chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra.

74. ENFIN, on continuera de la même manière à chercher les logarithmes des nombres premiers ; à trouver ensuite , par leur moyen , ceux des multiples de ces nombres ; & à écrire
 enfin

DE TRIGONOMETRIE. 65
enfin ces logarithmes dans les colonnes qui leur sont destinées, chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartiendra, jusqu'à ce que l'on ait les logarithmes de tous les nombres naturels qui sont marqués dans le cayer; & alors la Table des logarithmes sera construite.

CHAPITRE IV.

De la Manière de se servir de la Table des Logarithmes.

75. **L**A Table dont on vient d'enseigner la construction, sert à connoître le logarithme d'un nombre donné, & réciproquement le nombre auquel appartient un logarithme donné. Or ce nombre donné, & ce logarithme donné, se trouvent dans cette Table, ou ne s'y trouvent point. Ainsi tous les usages de cette Table peuvent être renfermés dans les deux Problèmes suivans, qui ont chacun deux cas.

PROBLEME I.

76. *Connoître le logarithme d'un nombre donné.*

Premier Cas.

77. *Lorsque le nombre donné se trouve dans la Table.*

Si le nombre donné n'est ni fractionnaire ni exprimé par plus de quatre chiffres, il se trouve dans la Table; ainsi il est facile de connoître

son logarithme , puisque ce logarithme y est écrit vis-à-vis de ce nombre , dans la colonne des logarithmes.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 4892, on cherchera dans la Table des logarithmes la page qui a pour titre 4800. On cherchera ensuite dans les colonnes des nombres naturels de cette page, le nombre donné 4892; & l'on trouvera vis-à-vis de ce nombre, dans les colonnes des logarithmes, cet autre nombre 3.6894864 pour le logarithme demandé.

Second Cas.

78. *Lorsque le nombre donné ne se trouve point dans la Table.*

Premièrement.

79. *Lorsque le nombre donné ne se trouve point dans la Table, parce qu'il est exprimé par plus de quatre chiffres, c'est-à-dire, parce qu'il est plus grand que 10000.*

80. ON examinera si par une ou par plusieurs divisions, on ne pourroit point réduire le nombre donné à un quotient quelconque moins grand que 10000; & s'il est possible de le faire, la somme des logarithmes de ce quotient, & des diviseurs que l'on aura employés pour le trouver, fera (a) le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 7564653, on examinera s'il ne pourroit point être exactement

divisé par quelques-uns des nombres premiers contenus dans la quatrième des Tables qui sont à la fin de ce Traité. Or, comme on trouvera qu'il peut l'être par ces nombres 3, 3 & 769, qui le réduisent à ce quotient 1093 moins grand que 10000, on ajoutera ensemble les logarithmes 0.4771212, 0.4771212, 2.8859263 & 3.0386201 de ces diviseurs & de ce quotient, & leur somme 6.8787888 sera (a) le logarithme demandé. (a) N. 53.

81. MAIS si le nombre donné est un nombre premier, & ne peut par conséquent être diminué par la division, alors on cherchera (b) les (b) N. 80. logarithmes du premier de ceux des nombres supérieurs au nombre donné, & du premier de ceux des nombres inférieurs au même nombre donné, qui peuvent être réduits par la division à des quotiens moins grands que 10000. Or, comme le nombre donné sera interposé entre ces deux nombres, son logarithme sera aussi renfermé entre les logarithmes de ces deux mêmes nombres; & par conséquent on le trouvera de la même manière dont on s'y est pris (c) pour connoître le logarithme du nombre 2. (c) N. 62.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 54059 qui est un nombre premier, on commencera par chercher (d) les logarithmes 4.7328760 & (d) N. 80. 4.7328599 des nombres 54060 & 54058, entre lesquels le nombre donné est interposé, & qui peuvent se réduire par la division à ces.

quotiens 5406 & 179 qui sont moins grands chacun que 10000. On multipliera ensuite ces nombres 54060 & 54058 l'un par l'autre, & l'on aura ce produit 2922375480, dont le logarithme sera la somme 9.4657359 des

(a) N. 53. logarithmes de ces deux mêmes nombres (a).

Enfin on extraira la racine seconde de ce produit, après l'avoir multiplié par cent trillions; & l'on trouvera ce nombre 54058.^{9999.99}₁₀₀₀₀₀₀₀₀

(b) N. 61. pour cette racine seconde approchée, dont le logarithme sera de 4.7328679 (b), puisque celui du produit 2922375480, est de 9.4657359, comme on vient de le dire. Mais cette racine sera moins grande que le nombre donné 54059; ainsi ce nombre sera alors interposé entre le nombre précédent 54060 & cette racine; & par conséquent son logarithme sera aussi interposé entre celui de ce dernier nombre & celui de cette même racine.

Or, si l'on continue à chercher ce logarithme demandé, de la même manière dont on

(c) N. 69. s'y est pris (c) pour connoître celui du nombre 2, on trouvera qu'il est de 4.7328677. Mais

(d) N. 70. ce ne sera qu'après six opérations (d); puisque la différence 161 des logarithmes des nombres 54060 & 54058, entre lesquels le nombre donné est interposé, ne peut être réduite à cette différence 2, qu'après en avoir pris la moitié de la moitié de la moitié, & ainsi de suite, jusqu'à six fois †.

† Voyez la cinquième Table, à la fin de ce Traité.

81. ENFIN, si le nombre donné n'étant point lui-même un nombre premier, ne peut cependant être réduit par la division qu'à un quotient qui soit un nombre premier plus grand que 10000; alors on considérera le nombre donné comme étant un nombre premier, & l'on cherchera son logarithme par le N° précédent. Ou bien, on le réduira par la division à un quotient qui sera un nombre premier, & l'on cherchera par le N° 82 le logarithme de ce quotient: on ajoutera ensuite à ce logarithme ceux des diviseurs que l'on aura employés pour réduire à ce quotient le nombre donné; & la somme sera le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple 3567894 qui ne peut être réduit par la division, qu'à ce quotient 54059, lequel est un nombre premier plus grand que 10000; on considérera le nombre proposé comme étant un nombre premier, & l'on cherchera son logarithme par le N° 81. Ou bien, on cherchera (a) le logarithme (*) N. 81. 47328679 du quotient 54059: on ajoutera ensuite à ce logarithme les logarithmes 0.3010300, 0.4771212 & 1.0413927 des diviseurs 2, 3 & 11 que l'on aura employés pour réduire à ce quotient le nombre proposé; & la somme 6.5524118 sera le logarithme demandé.

Secondement.

83. Lorsque le nombre donné ne se trouve

point dans la Table, parce qu'il est fractionnaire †.

84. COMME une fraction est toujours le quotient exact de son numérateur divisé par son dénominateur, si après avoir réduit le nombre donné & sa fraction en une seule fraction, on retranche le logarithme, du dénominateur de cette dernière fraction, du logarithme de son numérateur; la différence, c'est-à-dire le reste, qui sera le logarithme du quotient de ce numérateur divisé par son dénominateur (a), sera par conséquent le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple $937\frac{1}{2}$, on commencera par le réduire en une seule fraction $\frac{5927}{6}$. On retranchera ensuite le logarithme 0.7781512 du dénominateur 6 de cette fraction, du logarithme 3.7502769 du numérateur 5927 de cette même fraction; & le reste 2.9721257 sera le logarithme demandé.

85. MAIS si l'un des termes de la fraction en laquelle on aura réduit le nombre proposé, ne se trouve point dans la Table, parce qu'il sera exprimé par plus de quatre chiffres, ou si aucun

† Ce que l'on dit des nombres fractionnaires, doit aussi s'entendre des nombres qui sont accompagnés de sous-espèces, par exemple de ceux-ci, 17 toises, 3 pieds, 5 pouces; 29 liv. 13 sols, 8 deniers, &c. puisque ces sous-espèces 3 *pieds*, 5 *pouces*; 13 *sols*, 8 *deniers*, &c. ne sont que des fractions dont les dénominateurs sont déterminés à toujours être ou 6, ou 72, ou 20, ou &c. & par conséquent les nombres 17 toises, trois pieds, 5 pouces; 29. liv. 13 s. 8 den. &c. se réduisent à ceux-ci $17\frac{11}{72}$, $29\frac{41}{80}$, &c.

des termes de cette même fraction ne s'y trouve, parce qu'ils seront exprimés chacun par plus de quatre chiffres; alors on cherchera le logarithme de ce terme, ou les logarithmes de ces deux termes, de la manière dont on a dit (a) qu'il falloit s'y prendre pour trouver (a) N. 79. le logarithme d'un nombre exprimé par plus de quatre chiffres. Ensuite, du logarithme du terme qui sera le numérateur de la fraction en laquelle on aura réduit le nombre proposé; on retranchera le logarithme du terme qui sera le dénominateur de cette même fraction, de même qu'on l'a fait dans le N° précédent; & le reste sera le logarithme demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme de ce nombre, par exemple $1257\frac{5}{11}$, on commencera par le réduire en une seule fraction $\frac{5419}{43}$, comme l'on a fait dans le N° 84. On cherchera ensuite (b) le logarithme 4.7328679 du (b) N. 79. numérateur 54059 de cette fraction, lequel ne se trouve point dans la Table, parce qu'il est exprimé par plus de quatre chiffres. Enfin on retranchera de ce logarithme le logarithme 1.6334685 du dénominateur 43 de cette même fraction; & le reste 3.0993994 sera le logarithme demandé.

86. ENFIN, si le nombre donné est une fraction moins grande que l'unité, son logarithme sera toujours la différence du logarithme du dénominateur de cette fraction, au logarithme du numérateur de cette même fraction, de

même que lorsqu'il s'agit des nombre fractionnaires qui sont plus grands que l'unité. Mais alors cette différence sera *negative*; car, puisqu'il est dit (a) N. 59. que le logarithme de l'unité est 0 (a), celui d'un nombre moins grand que l'unité, doit être moins grand que 0. Or, les logarithmes de ces sortes de nombres se nomment *Logarithmes négatifs* ou *défectifs*.

Ainsi, le logarithme de cette fraction, par exemple $\frac{1}{4}$, est la différence $\S - 0.1249388$ du logarithme 0.6020600 du dénominateur 4 de cette fraction, au logarithme 0.4771212 du numérateur 3 de cette même fraction. Et il en est de même de tout autre exemple.

SCHOLIE I.

87. Comme les calculs des N^{os} 80, 81 & 82 sont un peu longs, voici une autre manière de trouver le logarithme d'un nombre quelconque plus grand que 10000.

Premièrement, on séparera du nombre proposé ses quatre premiers chiffres à main gauche, parce (b) N. 57. que (b) la Table des logarithmes ne contient point ceux des nombres qui sont exprimés par plus de quatre chiffres. On fera ensuite des autres chiffres le numérateur d'une fraction, à laquelle on donnera pour dénominateur un nombre décimal composé d'autant de zéros qu'il y aura de ces autres chiffres. Et ces quatre premiers chiffres exprimeront avec cette fraction, le quotient du nombre proposé divisé par ce nombre décimal.

§ Ce signe — signifie moins.

Secondement,

DE TRIGONOMETRIE. 73

Secondement, on cherchera dans la Table des logarithmes celui du nombre qui sera exprimé par ces quatre premiers chiffres. Et pour augmenter ce logarithme de la quantité qui sera nécessaire pour la fraction qui accompagnera ce nombre, on supposera que les différences des nombres naturels sont proportionnelles à celles des logarithmes de ces nombres. Ainsi l'on fera une règle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, le dénominateur de cette fraction; pour second terme, le numérateur de cette même fraction; Et pour troisième terme, la différence du logarithme que l'on aura trouvé dans la Table, au logarithme de la même Table, qui lui sera immédiatement supérieur. On ajoutera ensuite à ce premier logarithme le quatrième terme de cette proportion, Et l'on aura le logarithme de ce quotient.

Troisièmement enfin, on ajoutera à ce dernier logarithme, celui du dénominateur de la fraction de ce même quotient; Et la somme, qui sera le logarithme du produit de ce quotient multiplié par ce dénominateur (a), sera par conséquent (a) N. 34. le logarithme du nombre proposé.

Ainsi, si l'on veut trouver par cette manière le logarithme de ce nombre, par exemple,

† Ce qui n'est cependant point vrai (puisque les différences des nombres naturels sont égales entr'elles, & que celles des logarithmes sont d'autant plus petites, que ces logar. appartiennent à de plus grands nombres) mais qui par cette raison même que ces différences sont d'autant plus petites, que ces logarithmes appartiennent à de plus grands nombres, ne peut causer qu'une erreur peu considérable, lorsqu'il s'agit de très-grands nombres.

74 T R A I T E' C O M P L E T

4226182617 : premièrement, on séparera de ses autres chiffres les quatre premiers à main gauche, qui sont 4226. On fera ensuite de ces autres chiffres, le numérateur d'une fraction, à laquelle on donnera pour dénominateur, le nombre décimal 1000000, composé de 6 zéros, parce que ces autres chiffres sont au nombre de six; & l'on aura ce nombre $4226 \frac{182617}{1000000}$ pour le quotient du nombre proposé divisé par ce nombre décimal 1000000.

Secondement, on cherchera dans la Table le logarithme 3.6259295 du nombre exprimé par ces quatre premiers chiffres 4226; & l'on retranchera ce logarithme du logarithme 3.6260322 de la même Table, qui lui est immédiatement supérieur. On fera ensuite une règle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, le dénominateur 1000000 de la fraction $\frac{182617}{1000000}$; pour second terme, le numérateur 182617 de cette même fraction; & pour troisième terme, la différence 1027 des deux logarithmes précédents 3.6259295 & 3.6260322. On ajoutera enfin au premier de ces deux logarithmes, le quatrième terme de cette proportion, lequel est de 187 unités, (ou plutôt de 188, puisque ce qui reste de la division que l'on fait pour le trouver, vaut plus de la moitié d'une unité;) & la somme 3.6259483, sera le logarithme du quotient $4226 \frac{182617}{1000000}$.

Troisièmement enfin, on ajoutera à ce dernier logarithme, celui du nombre décimal

1000000. (ce qui se fera (a) en augmentant de (a) N. 53.
 6 unités sa caractéristique 3); & la somme
 3.6259483 sera le logarithme demandé.

S C H O L I E II.

88. Comme le nombre des parties du rayon, que chaque sinus contient, est exprimé par plus de quatre chiffres, son logarithme ne se trouve point dans la Table; ainsi l'on est obligé de le chercher par quelqu'un des N^{os} précédents 79, 80, 81, 82 ou 87. Or, à mesure que l'on trouve ce logarithme, on l'écrit vis-à-vis du nombre auquel il appartient, dans les colonnes qui sont à côté de celles des tangentes, & auxquelles on donne pour titre, Logarithmes des sinus †. Et par ce moyen, on a aussi une Table des logarithmes des nombres qui sont plus grands que 100000: mais qui ne contiennent que ceux de ces logarithmes dont on se sert le plus fréquemment; & ne rend point par conséquent la Table des logarithmes incommode par son volume ni par son étendue, comme cela arriveroit, si on la prolongeoit autant qu'il le feroit nécessaire, afin que les logarithmes des nombres qui expriment les valeurs des sinus, s'y trouvaissent compris.

89. Mais il faut remarquer que ces logarithmes que l'on trouve sous le titre de Logarithmes des sinus, dans les Tables ordinaires, telles que les petites de Wallac, connues aujourd'hui sous les noms des différents Auteurs qui les ont fait réim-

† Voyez la première Table, à la fin de ce livre.

primer†, ne sont point ceux des nombres qui expriment dans ces Tables les valeurs de ces sinus ; parce que ces valeurs y sont déterminées par rapport à un rayon que l'on ne suppose divisé qu'en dix millions de parties , pendant que les nombres auxquels ces logarithmes appartiennent , expriment les valeurs de ces mêmes sinus , calculées sur un rayon que l'on suppose divisé en dix billions de parties , & qui est par conséquent exprimé par trois chiffres de plus que le précédent.

90. Enfin , par les mêmes raisons pour lesquelles on a construit une Table des logarithmes des sinus , on en construit aussi une des logarithmes des tangentes ; c'est-à-dire , des logarithmes des nombres qui expriment les valeurs des tangentes. Or , on peut aussi trouver ces logarithmes par les mêmes N^{os} précédents 79 , 80 , 81 , 82 & 87 ; mais il est beaucoup plus facile de les chercher par les principes établis aux N^{os} 42 & 43 , en se servant des logarithmes , pour faire les règles de proportion que ces principes prescrivent.

Ainsi , pour construire cette dernière Table , on commence par chercher le logarithme de la tangente de l'arc d'une minute , de la même manière dont on a dit au N^o 44. qu'il falloit s'y prendre pour trouver la valeur de cette tangente. Excepté ¹ent, qu'au lieu de multiplier le sinus de l'arc d'une minute , qui est le second terme de la règle de proportion que l'on prescrit de faire dans ce numero , par le sinus total qui en est le troisième terme ; on

† MM. Ozanam , Rivard & de Parcieux , &c.

pose une unité avant la caractéristique 6 du logarithme 6.4637261 de ce premier sinus, afin d'avoir la somme 16.4637261 du logarithme de ce même premier sinus & du log. 10.00000000 du sinus total, & par conséquent (a) le log. du produit de ces deux sinus multipliés l'un par l'autre : 2^{ent}, qu'au lieu de diviser ce produit par le sinus du complément 89^d. 59^m. de cet arc d'une minute, qui est le premier terme de cette même proportion, on retranche du logarithme 16.4637261 de ce produit, le logarithme 9.9999999 de ce sinus de complément, afin d'avoir ce reste 6.4637262 pour le logarithme du quotient de ce même produit divisé par ce dernier sinus (b); & par conséquent (b) N. 55: pour le logarithme demandé, puisque ce quotient seroit (c) la valeur de cette tangente dont on cherche le logarithme. (c) N. 44.

On cherche ensuite de la même manière le logarithme de la tangente de l'arc de 2 min., celui de la tangente de l'arc de 3 min.; & ainsi de suite, jusqu'au logarithme de la tangente de l'arc de 45 deg. inclusivement. Et à mesure que l'on trouve ces logarithmes, on les écrit chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartient, dans les colonnes qu'on leur a destinées à côté de celles des logarithmes des sinus, & auxquelles on donne pour titre, Logarithmes des Tangentes †.

Enfin, on cherche les logarithmes des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. de la

† Voyez la première Table, à la fin de ce Traité.

- même manière dont on a dit au N^o. 46 qu'il falloit s'y prendre pour trouver ces sortes de tangentes. Excepté , premièrement , qu'au lieu de multiplier par lui-même le sinus total qui est le second & le troisième terme de la règle de proportion que l'on prescrit de faire dans ce
- (a) N. 60. numero(a), on double le logarithme 10.0000000 de ce même sinus total , afin d'avoir le logarithme 20.0000000 de sa seconde puissance. Secondement , qu'au lieu de diviser cette seconde puissance par la tangente du complément de l'arc dont on cherche le logarithme de la tangente , laquelle tangente de complément est le premier terme de cette même proportion ; on retranche du logarithme 20.0000000 de cette seconde puissance du sinus total , le logarithme de cette tangente de complément , afin d'avoir pour reste (b) le logarithme du quotient de cette même seconde puissance divisée par cette dernière tangente ; & par conséquent le logarithme demandé , puis-
- (b) N. 55. que ce quotient seroit (c) la valeur de la tangente dont on cherche le logarithme.
- (c) N. 46.

Or à mesure que l'on trouve ces logarithmes , on les écrit de même que l'on a fait les précédents , chacun vis-à-vis du nombre auquel il appartient , dans les colonnes qui leur sont destinées à côté de celles des logarithmes des sinus. Et lorsqu'on a ainsi joint aux Tables précédentes celle des logarithmes de toutes les tangentes qui y sont marquées , il ne reste plus à désirer pour la pratique de la Trigonometrie , que d'avoir de bons instrumens.

Mais il faut aussi remarquer que les logarithmes des tangentes que l'on trouve dans les Tables ordinaires sous le titre qui les indique, ne sont point ceux des nombres qui expriment dans ces Tables les valeurs de ces tangentes, par les mêmes raisons que l'on a dites (a) pour les (a) N. 89. logarithmes des sinus.

COROLLAIRE.

91. *Il suit de la manière dont on trouve les logarithmes des tangentes des arcs qui sont au dessus de 45 deg. que la somme du logarithme de la Tangente d'un arc quelconque & du logarithme de la Tangente du complément de ce même arc, est toujours le double 200000000 du logarithme du sinus total; & par conséquent, que si du double 200000000 du logarithme du sinus total, on retranche le logarithme de la Tangente d'un arc quelconque, le reste fera le logarithme de la Tangente du complément de cet arc quelconque.*

SCHOLIE III.

92. *Il est souvent nécessaire de sçavoir quel est le logarithme du sinus ou de la tangente d'un arc qui contient des parties de minutes, & dont par conséquent le sinus ni la tangente ne se trouve point dans la Table. Or, on ne peut connoître ce logarithme par aucun des numeros précédents; puisque l'on n'a point le nombre naturel † auquel ce logarithme appartient. Mais*

† On pourroit chercher ce nombre par les Nos 25 ou 48; & l'on trouveroit ensuite son logarithme par quelqu'un des Nos précédents; mais cette voie seroit trop longue.

- comme les différences de l'arc de la Table qui précède immédiatement l'arc donné, à ce même arc donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, ne peuvent être alors que très-petites, on peut sans erreur sensible les supposer proportionnelles à celles des logarithmes des sinus de ces arcs, & à celles des logarithmes des tangentes de ces mêmes arcs, de
- (a) N. 28. même que l'on a supposé (a) qu'elles l'étoient à celles de ces mêmes sinus & à celles de ces mêmes tangentes. Et par conséquent, on peut aussi chercher les logarithmes des sinus & des tangentes de ces sortes d'arcs, de la même manière
- (b) N. 28. dont on s'y est pris (b) pour trouver les valeurs de ces sinus & de ces tangentes. Excepté qu'il faudra se servir des différences des logarithmes des sinus ou des logarithmes des tangentes des arcs de la Table entre lesquels l'arc donné sera interposé, au lieu de se servir des différences de ces sinus ou de celles de ces tangentes.

Ainsi, si l'on veut connoître le logarithme du sinus d'un arc, par exemple, de $26^{\text{d}}. 16^{\text{m}}. 46^{\text{s}}$ on fera une règle de proportion dont le premier terme sera 60 secondes; le deuxième, 46 secondes; & le troisième, la différence 2559 des logar. 9.6459619 & 9.646178 des sinus des arcs de $26^{\text{d}}. 16^{\text{m}}$. & $26^{\text{d}}. 17^{\text{m}}$. entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé & qui se trouvent dans la Table: & la somme 9.6461581 du quatrième terme 1962 de cette proportion & du logarithme 9.6459619 du sinus de
l'arc

l'arc de $26^{\circ} 16'$ qui précède immédiatement l'arc donné, sera le logarithme demandé.

Et si l'on veut aussi connoître le logarithme de la tangente de ce même arc, on fera aussi une règle de proportion, dont le premier terme sera 60 secondes & le deuxième 46 secondes; mais pour le troisième, on prendra la différence 3183 des logarithmes 9.6932934 & 9.6936117 des tangentes des arcs de $26^{\circ} 16'$ & de $26^{\circ} 17'$ entre lesquels l'arc donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table: & la somme 9.6935374 du quatrième terme 2440 de cette proportion & du logarithme 9.6932934 de la tangente de l'arc de $26^{\circ} 16'$ qui précède immédiatement l'arc donné, sera le logarithme demandé.

PROBLÈME II.

93. Connoître le nombre auquel appartient un logarithme donné.

Premier Cas.

94. Lorsque le logarithme donné se trouve dans la Table.

Si le logarithme donné n'appartient point à un nombre fractionnaire, & n'a point pour caractéristique un nombre plus grand que 3, on le trouvera dans la Table. Ainsi, il sera facile de connoître le nombre auquel il appartiendra, puisque ce nombre est écrit à main gauche de ce logarithme & à côté de lui, dans la colonne des nombres naturels de cette même Table.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple 3.8114409, on le cherchera dans la Table sous la caractéristique 3 : & l'on trouvera à côté de lui à main gauche, dans la colonne des nombres naturels, ce nombre 6473 pour le nombre demandé.

Second Cas.

95. Lorsque le logarithme donné ne se trouve point dans la Table.

Premièrement.

96. Si le logarithme donné ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à sa caractéristique, qui est un nombre plus grand que 3 : on le considérera comme étant la somme du logarithme que l'on trouvera dans la Table sous la caractéristique 3, & du logarithme d'un nombre décimal qui aura pour caractéristique l'excès de la caractéristique du logarithme donné sur cette caractéristique 3.

(*) N. 53. Ainsi, le nombre demandé sera (a) le produit du nombre auquel appartiendra le logarithme que l'on aura trouvé dans la Table sous cette caractéristique 3, multiplié par le nombre décimal auquel appartiendra cet autre logarithme; & par conséquent, il sera facile de connoître le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 5.6733896 qui ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à sa caractéristique

que 5, qui surpasse de deux unités la caractéristique 3 sous laquelle on trouve dans cette même Table cet autre logarithme 3.6733896: on considérera ce logarithme donné, comme étant la somme de ce dernier logarithme qui appartient au nombre 4714, & du logarithme 2.0000000 qui appartient au nombre décimal 100. Ainsi, le nombre demandé sera (a) le (a) N. 93. produit de ce nombre 4714 multiplié par ce nombre décimal 100; & par conséquent, ce nombre demandé sera 471400.

97. ET si le logarithme donné ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à la caractéristique, qui est un nombre plus petit que 3 : alors on considérera le logarithme que l'on trouvera dans la Table sous la caractéristique 3, comme étant la somme du logarithme donné, & du logarithme d'un nombre décimal qui aura pour caractéristique l'excès de cette caractéristique 3 sur celle du logarithme donné. Ainsi, le nombre demandé sera (b) le (b) N. 55. quotient du nombre auquel appartiendra le logarithme que l'on aura trouvé dans la Table sous cette caractéristique 3, divisé par le nombre décimal auquel cet autre logarithme appartiendra; & par conséquent, il sera encore facile de connoître le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 1.6733896 qui ne se trouve point dans la Table par rapport seulement à la caractéristi-

que 1, qui est plus petite de deux unités que la caractéristique 3 sous laquelle on trouve dans cette même Table cet autre logarithme 3.6733896 : on considérera ce dernier logarithme qui appartient au nombre 4714, comme étant la somme du logarithme donné & du logarithme 2.0000000 du nombre décimal 100. Ainsi, le nombre demandé sera (a) le quotient de ce nombre 4714 divisé par ce nombre décimal 100; & par conséquent ce nombre demandé sera $47\frac{14}{100}$, ou $47\frac{7}{50}$.

Secondement.

98. Si le logarithme donné ayant le nombre 3 pour caractéristique, ses autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous cette caractéristique 3, cene sera point parce que le nombre auquel il appartiendra sera plus grand que ceux qui y sont compris, puisque (b) ce nombre ne sera point exprimé par plus de quatre chiffres; mais seulement parce que ce nombre sera fractionnaire, & que par conséquent il sera interposé entre deux des nombres de cette même Table. Or, ces deux nombres entre lesquels ce nombre fractionnaire demandé sera interposé, se suivront immédiatement. Ainsi, si l'on cherche le nombre auquel appartiendra le logarithme de la Table, qui précédera immédiatement le logarithme donné, on connoitra par ce nombre la partie entière du nombre demandé; & par conséquent, il ne s'agira plus que de trouver sa partie fractionnaire.

Or, pour trouver cette partie fractionnaire, on supposera que les différences des logarithmes sont proportionnelles à celles des nombres auxquels ces logarithmes appartiennent †. Ainsi, l'on fera une règle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, la différence des logarithmes de la Table entre lesquels le logarithme donné sera immédiatement interposé; pour second terme, la différence du logarithme de la Table, qui précédera immédiatement le logarithme donné, à ce même logarithme donné; & pour troisième terme, la différence 1 des nombres auxquels appartiendront ces logarithmes de la Table entre lesquels ce même logarithme donné sera immédiatement interposé. On ajoutera ensuite le quatrième terme de cette proportion, qui sera la partie fractionnaire du nombre demandé, à la partie entière du même nombre, que l'on aura déjà trouvée; & la somme sera le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 3.6734175 qui ne se trouve point dans la Table, mais qui a le nombre 3 pour caracté-

† Ce qui n'est point vrai, comme on l'a déjà remarqué (a); (a) N. 87. mais ne peut causer qu'une erreur peu considérable, puisque les différences des logarithmes étant d'autant plus petites, que ces logarithmes appartiennent à de plus grands nombres, on exige que la caractéristique du logarithme donné ne soit point de moins de 3 unités, afin que l'on ne prenne les différences que de logarithmes qui appartiennent à des nombres exprimés au moins par quatre chiffres.

ristique : on fera une règle de proportion, à laquelle on donnera pour premier terme, la différence 921 des logarithmes 3.6733896 & 3.6734817 entre lesquels le logarithme donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table; pour second terme, la différence 279 du même logarithme précédent 3.6733896 qui est immédiatement inférieur au logarithme donné, à ce même logarithme donné; & pour troisièmeterme, la différence 1 des nombres 4714 & 4715 auxquels appartiennent ces deux mêmes logarithmes 3.6733896 & 3.6734817 : & la somme $4714\frac{921}{107}$ du quatrième terme $\frac{279}{21}$ ou $\frac{921}{107}$ de cette proportion, & du nombre 4714 auquel appartient ce logarithme 3.6733896 qui précède immédiatement le logarithme donné, sera le nombre demandé †.

Troisièmement.

99. Si le logarithme donné ayant un nombre plus grand que 3 pour caractéristique, les autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : on le considérera comme étant la somme d'un logarithme qui aura ce nombre 3 pour caractéristique & ne se trouvera point dans la Table, & du logarithme d'un nombre décimal dont la caractéristique sera l'excès de la caractéristique.

† Comme cette proportion aura toujours l'unité pour troisièmeterme, le quatrième sera toujours une fraction qui aura le second terme de cette même proportion pour numérateur, & le premier pour dénominateur.

ique du logarithme donné sur cette caractéristique 3. Ainsi le nombre demandé sera (a) N. 53. le produit du nombre auquel appartiendra ce logarithme qui aura le nombre 3 pour caractéristique & ne se trouvera point dans la Table ; multiplié par le nombre décimal auquel cet autre logarithme appartiendra ; & par conséquent il sera facile de connoître le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 5.4750412 dont la caractéristique est plus grande que le nombre 3, & dont les autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : on considérera ce logarithme comme étant la somme du logarithme 3.4750412 qui a le nombre 3 pour caractéristique, & ne se trouve point dans la Table, & du logarithme 2.0000000 qui appartient au nombre décimal 100. Ainsi le nombre demandé sera (b) le produit du nom- (b) N. 53.
bre 2985¹²/₁₀₀ auquel on trouvera (c) que ce logarithme 3.4750412 appartient, multiplié par ce nombre décimal 100 ; & par consé- (c) N. 98.
quent ce nombre demandé sera 298566¹²/₁₀₀.

100. Et si le logarithme donné ayant un nombre moins grand que 3 pour caractéristique, ses autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : alors on considérera un logarithme qui aura ce nombre ; pour caractéristique & ne se trouvera point

dans la Table, comme étant la somme du logarithme donné, & du logarithme d'un nombre décimal dont la caractéristique sera l'excès de cette caractéristique 3 sur celle de ce logarithme donné. Ainsi, le nombre demandé

(a) N. 55. sera (a) le quotient du nombre auquel appartiendra ce logarithme, qui aura le nombre 3 pour caractéristique & ne se trouvera point dans la Table, divisé par le nombre décimal auquel cet autre logarithme appartiendra ; & par conséquent, il sera facile de connoître le nombre demandé.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, 1.4750412 dont la caractéristique est moins grande que le nombre 3, & dont les autres chiffres ne se trouvent point dans la Table sous la caractéristique 3 : on considérera ce logarithme 3.4750412 qui a le nombre 3 pour caractéristique & ne se trouve point dans la Table, comme étant la somme du logarithme donné & du logarithme 2.0000000 qui appartient au nombre décimal 100. Ainsi, le

(b) N. 55. nombre demandé sera (b) le quotient du nom-

(c) N. 98. bre $298\frac{33}{49}$ auquel on trouvera (c) que ce logarithme 3.4750412 appartient, divisé par ce nombre décimal 100 ; & par conséquent ce nombre demandé sera $29\frac{10127}{12135}$, ou $29\frac{8566}{10000}$, si l'on réduit la fraction en fraction décimale †.

† On réduit une fraction en fraction décimale, en faisant une règle de proportion, à laquelle on donne pour premier terme le

Quatrièmement.

Quatrièmement.

101. Enfin, si le logarithme donné est déficient, il ne se trouvera point dans la Table; puisque (a) il appartiendra alors à une fraction (a) N. 86. qui sera moins grande que l'unité. Mais comme le numérateur d'une fraction est toujours égal au produit de cette même fraction multipliée par son dénominateur, le logarithme du numérateur d'une fraction, est aussi toujours la somme du logarithme de cette fraction & du logarithme du dénominateur de cette même fraction (b). Ainsi, si l'on ajoute au logarithme donné celui du nombre aussi donné, ou que l'on voudra donner, pour dénominateur à la fraction à laquelle ce premier logarithme appartiendra, & si l'on cherche ensuite par quelqu'un des Nos précédents, le nombre dont la somme de ces deux logarithmes sera le logarithme, ce nombre sera le numérateur de la fraction demandée; & par conséquent on connoîtra la valeur de cette fraction, puisque son dénominateur qui est donné; ou que l'on aura pris à volonté, est connu.

Ainsi, si l'on veut connoître le nombre auquel appartient ce logarithme, par exemple, — 0.5118833 qui est déficient, & qui par conséquent ne peut convenir qu'à une fraction moins grande que l'unité: on ajoutera à ce logarithme donné celui du nombre que l'on prendra pour dénominateur de la fraction que l'on veut réduire; pour second terme, le numérateur de la même fraction; & pour troisième terme, le nombre décimal que l'on veut.

voudra donner pour dénominateur à la fraction demandée ; par exemple , le logarithme 2.0000000 du nombre décimal 100 , si l'on veut que ce dénominateur soit 100. On cherchera ensuite par quelqu'un des numéros précédents , le nombre auquel appartient ce logarithme 1.4881167 , qui est la somme des deux logarithmes précédents — 0.5118833 & 2.0000000 ; & comme on trouvera qu'il appartient à ce nombre 30 , du moins à peu de chose près , on en conclura que cette fraction $\frac{30}{100}$ ou $\frac{3}{10}$ fera le nombre demandé.

SCHOLIE I.

102. Comme les logarithmes different d'autant moins entr'eux qu'ils appartiennent à de plus grands nombres , plus les nombres auxquels appartiendront les logarithmes dont on se servira pour connoître le nombre auquel appartient un logarithme qui ne se trouve point dans la Table , seront grands , & plus le nombre que l'on trouvera sera exact. De manière que si pour connoître le nombre auquel ce logarithme 1.4750412 appartient , on se servoit des logarithmes 1.4623980 & 1.4771212 entre lesquels il est immédiatement interposé , on trouveroit ce nombre $29\frac{3951}{4601}$ qui est beaucoup plus grand , mais bien moins exact , que cet autre , $29\frac{10187}{1413}$ que l'on a trouvé par le N° 99.

Mais lorsqu'il n'est point nécessaire de connoître avec une précision rigoureuse le nombre demandé , on retranche du logarithme donné , ou

on lui ajoute, le logarithme du nombre décimal qu'il faut en retrancher, ou lui ajouter, pour le changer en un autre logarithme dont le nombre soit la caractéristique (a). On cherche ensuite (a) N. 99. le nombre auquel appartient le logarithme de la Table, qui précède immédiatement cet autre logarithme. Enfin, l'on ajoute à ce nombre autant de zeros, ou l'on en retranche autant de chiffres, que l'exige le nombre décimal auquel appartient le logarithme que l'on a retranché du logarithme donné, ou qu'on lui a ajouté; Et l'on prend le produit ou le quotient pour le nombre demandé.

Ainsi l'on trouve par cette dernière manière, que ce logarithme 5.4750412, appartient au nombre 298500; Et que celui-ci 1.4750412, appartient au nombre 29¹⁷.

SCHOLIE II.

103. Il est souvent nécessaire de connoître la valeur de l'arc auquel appartient le logarithme d'un sinus ou d'une tangente, qui, parce que cet arc contient des parties de minutes, ne se trouve point dans la Table. Or, on ne peut trouver la valeur de cet arc par aucun des cas du problème précédent, puisque cette valeur n'est point exprimée par le nombre naturel auquel ce

† Les logarithmes dont il s'agit ici, n'appartiennent point immédiatement aux arcs, puisqu'ils ne sont point les logarithmes des nombres qui expriment les valeurs de ces arcs: mais ils leur appartiennent relativement, puisqu'ils sont les logarithmes des nombres qui expriment les valeurs des sinus & des tangentes de ces mêmes arcs.

logarithme appartient. Mais si l'on suppose, de même qu'on l'a fait au N^o 91, & par les mêmes raisons, que les différences du logarithme de la Table qui précède immédiatement le logarithme donné, à ce même logarithme donné & à celui de la Table qui lui est immédiatement supérieur, sont proportionnelles à celles des arcs auxquels ces logarithmes appartiennent, on résoudra ce problème de la même manière dont on a résolu celui du même N^o 91.

Ainsi, si l'on veut connoître l'arc auquel appartient ce logarithme, par exemple, 9.646.1580 qui est le logarithme d'un sinus : on fera une règle de proportion, à laquelle on donnera, pour premier terme, la différence 2559 des logarithmes 9.6459619 & 9.64612178 entre lesquels le logarithme donné est immédiatement interposé, & qui se trouvent dans la Table ; pour second terme, la différence 1961 du même logarithme précédent 9.6459619 qui est immédiatement inférieur au logarithme donné, à ce même logarithme donné ; & pour troisième terme, 60 secondes. On ajoutera ensuite le quatrième terme de cette proportion, lequel est 46 secondes, du moins à peu de chose près, à la valeur 26^{d.} 16^{m.} de l'arc auquel appartient ce logarithme 9.6459619 qui précède immédiatement le logarithme donné ; & la somme 26^{d.} 16^{m.} 46^{s.}

(*) N. 6. sera (a) la valeur de l'arc demandé, ou celle du supplément de cet arc.

On cherche de la même manière l'arc auquel

appartient le logarithme d'une tangente qui ne se trouve point dans la Table : excepté que l'on se sert des différences des logarithmes des tangentes, au lieu de se servir de celles des logarithmes des sinus.

CHAPITRE V.

De la manière de se servir des Logarithmes.

104. **S**I au lieu de retrancher le logarithme du premier terme d'une règle de proportion, de la somme des logarithmes des termes moyens de cette même règle, on'en retranche le nombre décimal qui est immédiatement supérieur au logarithme de ce premier terme; on ôtera de cette somme le *Complément* † de ce même dernier logarithme, de plus que ce que l'on doit en ôter pour avoir le logarithme du quatrième terme de cette proportion. Ainsi, il s'en faudra de ce complément que ce qui restera de cette somme après en avoir ôté ce nombre décimal, ne soit égal au logarithme de ce quatrième terme; & par conséquent, si l'on ajoute au reste ce même complément, la somme sera le logarithme de ce quatrième terme.

† On appelle *Complément* d'un logarithme, la différence de ce logarithme au nombre décimal qui lui est immédiatement supérieur. Ainsi, le *Complément* de ce logarithme, par exemple, 1.4913617, est la différence 8.5086383 au nombre décimal 10.0000000 qui lui est immédiatement supérieur.

Par exemple, 2.7951846 est la somme des logarithmes 1.5910646 & 1.2041200 des termes moyens 39 & 16 de cette proportion $24 : 39 :: 16 : *$. Or, si au lieu de retrancher de cette somme le logarithme 1.3802112 du premier terme 24, on en retranche ce nombre 100000000 qui est le nombre décimal immédiatement supérieur à ce dernier logarithme; on ôtera de cette somme le complément 8.6197888 de ce même dernier logarithme, de plus que ce que l'on doit en ôter pour avoir le logarithme du quatrième terme de cette proportion. Ainsi, il s'en faudra de ce complément que la différence — 7.2048154 de ce nombre décimal à cette somme, ne soit égale au logarithme de ce quatrième terme; & par conséquent, si à cette différence — 7.2048154, on ajoute ce même complément 8.6197888, la somme 1.4149734 sera le logarithme de ce quatrième terme.

On peut donc également avoir le logarithme du quatrième terme d'une règle de proportion, en retranchant le logarithme de son premier terme, de la somme des logar. de ses termes moyens; ou en retranchant de la somme du complément du logar. de ce premier terme & des logarithmes de ces termes-moyens; le nombre décimal qui est immédiatement supérieur au logarithme de ce même premier terme. Ainsi l'on peut également résoudre par ces deux manières tous les problèmes qui dé-

endent des proportions ; mais on doit préférer la dernière , parce qu'elle sera la plus courte & la plus facile , lorsque l'on s'en sera rendu la pratique familière. Or pour cet effet il faut remarquer :

105. PREMIEREMENT, que si le sinus total se trouve au premier terme d'une règle de proportion, on ne doit point se servir de la règle du complément *Logarithmétique* ; parce que le logarithme du sinus total est un nombre décimal , & qu'il n'y a rien de plus facile que de retrancher d'un nombre quelconque, un nombre décimal.

Ainsi , pour avoir le logarithme du quatrième terme de cette proportion, par exemple, *sin. total : tang. de 53 d. 40 m. :: 637 $\frac{11}{16}$ tois. : ** il faut ajouter le logarithme 10.1334356 de la tangente de 53 deg. 40 min. au logar. 2.8045823 du nombre naturel 637 $\frac{11}{16}$ (a) ; re- (a) N. 83. trancher ensuite de leur somme 12.9380179, le logarithme 10.0000000 du sinus total ; & le reste 2.9380179 sera le logarithme demandé.

Logarithme de la Tangente de 53 d. 40 m. 10.1334356.

Logarithme du nombre naturel 637 $\frac{11}{16}$ - - - 2.8045823,

Somme - - - - - 12.9380179.

Logarithme du sinus total - - - - - 10.0000000.

Logarithme demandé - - - - - 2.9380179.

(i) donne le nombre 866 $\frac{23}{111}$ ou 867 p. m. pour le quatrième terme de la proportion dont il s'agit. (b) N. 99.

106. SECONDEMENT , que puisqu'un loga-

(*) N. 104. rithme quelconque & son complément étant joints ensemble, forment toujours un nombre décimal (a); chaque chiffre du complément d'un logarithme quelconque, doit toujours exprimer ce qui manque pour valoir 9 à celui des chiffres de ce même logarithme qui lui répond: excepté le dernier à main droite, qui étant joint à son correspondant doit faire 10.

Ainsi, l'on aura le complément de ce logarithme, par exemple, 2.8045976, en posant un 7 au lieu du 2 qui est son premier chiffre à main gauche; un 1 au lieu du 8, un 9 au lieu du 0, un 5 au lieu du 4, un 4 au lieu du 5, un 0 au lieu du 9, un 2 au lieu du 7, & enfin un 4 au lieu du 6 qui est son dernier chiffre à main droite; & par conséquent ce nombre 7.1954024 sera le complément du logarithme proposé.

<i>Logarithme</i>	- - - - -	2.8045976.
<i>Complémens</i>	- - - - -	7.1954024.

107. TROISIÈMEMENT, qu'aucun des nombres naturels inférieurs à 10.000 0000, n'a pour nombre décimal immédiatement supérieur à son log. que ce même nombre 1000 0000 † qui est le logarithme du sinus total. Par conséquent, lorsque le logarithme du premier terme

† Les neuf premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 & 9 sont aussi compris dans cette proposition: parce que l'on considère la caractéristique 0 de leurs logarithmes, comme faisant parrie de ces logarithmes; & que par cette raison, l'on pose un 9 au lieu de ce 0, lorsque l'on prend (a) les complémens de ces mêmes logarithmes.

(*) N. 106.

d'une

Une règle de proportion quelconque, ne surpasse point ce nombre 100000000, le logarithme du quatrième terme de cette règle, est toujours la différence du logarithme du sinus total à la somme du complément du logarithme du premier terme de cette même règle & des logarithmes de ses termes moyens.

Ainsi, l'on aura le logarithme 3.1638032 du quatrième terme de cette proportion, par exemple, *sinus de 35 d. 10 m. : sinus de 76 d. 25 m. :: 864 toises : **, en ajoutant ensemble le complément 0.2396101 du logarithme du premier terme de cette même proportion, & les logarithmes 9.9876794 & 2.9365137 de ses termes moyens; & en retranchant ensuite de leur somme 13.1638032, le logarithme du sinus total, c'est-à-dire, 10.0000000.

Compl. du log. 9.7603899 du sinus de 35 d. 10 m.	0.2396101
Logarithme du sinus de 76 deg. 25 min.	9.9876794
Logarithme du nombre naturel 864.	2.9365137

Somme	13.1638032
Logarithme du sinus total	10.0000000

Logarithme demandé	3.1638032
--------------------	-----------

qui (a) donne ce nombre 1458⁴⁷/₃₇₇ ou 1458³/₁₀ p.p. pour le quatrième (a) N. 98.
me terme de la proportion dont il s'agit.

108. QUATRIÈMEMENT, que lorsque le logarithme du premier terme d'une règle de proportion surpasse ce nombre 100000000, (ce qui n'arrive dans la pratique de la Trigonométrie qui fait ici notre principal objet, que lorsque ce premier terme est une tangente d'un arc de plus de 45 degrés,) il est plus court

de prendre pour le complément du logarithme de ce premier terme, la différence de ce logarithme au double du logarithme du sinus total, que celle de ce même logarithme au nombre décimal qui lui est immédiatement supérieur. Parce que cette première différence étant toujours (a) le logarithme de la tangente du complément de l'arc dont il s'agit, elle se trouve toute calculée dans les colonnes des logarithmes des tangentes; & qu'il n'est pas plus difficile de retrancher 200000000 de la somme du complément du logarithme du premier terme d'une règle de proportion & des logarithmes de ses termes moyens, que d'en retrancher 100000000.

Ainsi, l'on aura le logarithme 2.8045835 du quatrième terme de cette proportion, par exemple, *tang. de 53^{d.} 40^{m.} : sinus total :: 867 toises : **, en ajoutant ensemble le logarithme 9.8665644 de la tangente du complément du premier terme de cette même proportion, & les logarithmes 10.0000000 & 2.9380191 de ses termes moyens; & en retranchant de leur somme 22.8045835, le double 20.0000000 du logar. du sinus total.

Logar. de la Tang. du Compl. de 53 d. 40 m.	-	9.8665644.
Logarithme du sinus total	-	10.0000000.
Logar. du nombre naturel 867	-	2.9380191.

Somme	-	22.8045835.
Double du logarithme du sinus total	-	20.0000000.

Logarithme demandé	-	2.8045835.
--------------------	---	------------

(b) N. 100. qui (a) donne ce nombre 637 ²²¹⁹/₃₅₀₅ ou 637 ¹¹/₃₅ p. p. pour le quatrième terme de la proportion dont il s'agit.

109. CINQUIÈMEMENT, que toutes les caractéristiques des logarithmes sont des nombres homologues†. Ainsi, puisque le logarithme du sinus total est un nombre décimal, on le retranchera de la somme du complément du logarithme du premier terme d'une règle de proportion & des logarithmes de ses termes moyens (lorsqu'il sera possible de le faire) en ôtant sa caractéristique (laquelle est 10,) de la caractéristique de cette somme. Et l'on retranchera son double, de la même somme, en ôtant la caractéristique de ce double (laquelle est 20,) de la caractéristique de cette même somme.

Ainsi, pour retrancher le logarithme du sinus total, par exemple, de la somme précédente 13.1638032 (a), il n'y a qu'à supprimer le 1 (a) N. 107. qui est le premier chiffre à main gauche de la caractéristique 13 de cette somme. Et pour retrancher le double du logarithme du sinus total, par exemple, de l'autre somme précédente 22.8045835 (b), il suffit de supprimer (b) N. 108. le 2 qui est le premier chiffre à main gauche de la caractéristique 22 de cette autre somme.

110. SIXIÈMEMENT, que pour retrancher un nombre, de la somme qu'il formeroit avec d'autres nombres, il suffit de ne le point comprendre dans cette somme. Et par conséquent,

† J'appelle nombres *Homologues*, c'est-à-dire, de même nom, les unités & les unités, les dizaines & les dizaines, les centaines & les centaines, &c.

100. TRAITE' COMPLET

pour retrancher le logarithme du sinus total, de la somme du complément du logarithme du premier terme & des logarithmes des termes moyens d'une règle de proportion, dont le sinus total est l'un de ces termes moyens, il suffit de le supprimer.

Ainsi l'on aura, par exemple, le logarithme 10.1334356 du quatrième terme de cette
(a) N. 108. proportion, $637\frac{11}{20}$ toises p.p. (a) : 867 toises :: sinus total : tangente de \ast , en ajoutant le complément 7.1954165 du logarithme de son premier terme, au logarithme 2.9381091 de son second terme.

Compl. du log.	2.8045835	du nomb. nat.	$637\frac{11}{20}$	p.p.	7.1954165,
Logarithme du nombre naturel	867	- - -	-	-	2.9381091,
Logarithme du sinus total	-	-	-	-	-

Somme	-	-	-	-	10.1334356.
-------	---	---	---	---	-------------

qui est le logarithme de la tangente de 53 deg. 40 m. & donne par conséquent cette tangente, pour le quatrième terme de la proportion dont il s'agit.

111. SEPTIÈMEMENT enfin, que lorsqu'on
(b) N. 110. aura supprimé (b) le logarithme du sinus total qui se sera trouvé au second ou au troisième terme d'une règle de proportion, dont le logarithme du premier terme sera plus grand que celui de ce même sinus total; il faudra pour avoir le logarithme du quatrième terme de cette règle, retrancher encore 10 de la caractéristique de la somme du complément du logarithme du premier terme de cette même règle,

& du logarithme de celui de ses termes moyens qui ne sera point le sinus total. Car, lorsque le logarithme du premier terme d'une règle de proportion, est plus grand que celui du sinus total, il faut pour avoir le logarithme du quatrième terme de cette règle, retrancher le double du logarithme du sinus total (ou ce qui revient au même, deux fois le logar. du sinus total,) de la somme du complément du logar. du premier terme de cette même règle & des logarithmes de ses termes moyens (a). Or, en (a) N. 108. supprimant le logarithme du sinus total, on ne l'aura retranché qu'une fois de cette somme. Il faudra donc l'en retrancher encore une fois. Et par conséquent, il faudra (b) retrancher 10 (b) N. 109. de la somme du complément du logarithme du premier terme de la proportion dont il s'agira, & du logarithme de celui de ses termes moyens qui ne sera point le sinus total ; puis-que cette dernière somme sera (c) ce qui res- (c) N. 110. tera de la première, après en avoir ôté le logarithme du sinus total.

Ainsi, pour avoir le logarithme du quatrième terme de cette proportion, par exemple, *tangente de 53^{d.} 40^{m.} : sinus total :: 867 toises : **, on ajoutera le complément du logarithme de son premier terme, c'est-à-dire, le logarithme 9.8665644 de la tangente du complément de 53^{d.} 40^{m.}, au logarithme 2.9380191 de son troisième terme ; & l'on supprimera ensuite (d) le 1 qui est le premier (d) N. 109.

102 **TRAITE' COMPLET**
 chiffre à main gauche de la caractéristique
 12 de la somme 12.8045835 de ces deux
 logarithmes.

Logar. de la tang. du compl. de 53 d. 40 m. 9.8665644.
Logarithme du sinus total. - - - - - -
Logarithme du nombre naturel 867 - - - - 2.9380191.

Somme - - - - - - - 12.8045835.

(a) N. 100. qui donne ce logarithme 2.8045835, & par conséquent (a) ce
 nombre $637\frac{13}{10}$ p. p. pour le quatrième terme de la proportion
 dont il s'agit.

Fin du premier Livre.





LIVRE SECOND.

De la Trigonométrie-rectiligne.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes de la Trigonométrie-rectiligne.

PROPOSITION I. Théorème.

112. **D**ANS un triangle-rectiligne quelconque, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui leur sont opposés †.

Dans le triangle ABC*, le côté AB est au côté AC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B : le côté AB est au côté BC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A : enfin, le côté AC est au côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A. * Fig. 16.

Constr. Inscrivez dans un cercle quelconque Z, un triangle DEF équiangle au triangle ABC (a); (a) E. I. 4. & divisez en deux parties égales, aux points P. 2. G, H & I (b), chaque côté de ce triangle (b) E. I. 1. inscrit. p. 10.

Démonstr. Les triangles ABC & DEF sont équiangles [c]. Ainsi, (c) les côtés AB, AC & BC (c) E. I. 6. p. 4.

† Ce Théorème est suffisamment démontré par ce qui a été dit au premier chapitre de la première section du Livre précédent. Ainsi, si on le démontre ici immédiatement, ce n'est qu'afin de présenter de suite au Lecteur, toutes les Propositions sur lesquelles la pratique de la Trigonométrie-rectiligne est fondée.

- du premier, ont entr'eux les mêmes rapports que les côtés DE, DF & EF du second. Or, ces côtés DE, DF & EF ont aussi entr'eux les mêmes rapports que leurs moitiés DG, DH & FI.
- (a) E. l. 5. FI (a); & ces moitiés DG, DH & FI sont (b) les sinus des angles F, E & D qui leur sont opposés. Donc les côtés AB, AC & BC ont entr'eux les mêmes rapports que les sinus des angles F, E & D (c). Mais ces angles F, E & D sont égaux aux angles C, B & A, chacun à chacun [c]. Donc les sinus des angles F, E & D sont aussi ceux des angles C, B & A, chacun de chacun. Et par conséquent les côtés AB, AC & BC ont entr'eux les mêmes rapports que les sinus des angles C, B & A. Donc C. Q. F. D.
- (c) E. l. 5. P. 11.

S C H O L I E.

- * Fig. 16. 113. Si l'on suppose que le cercle Z* est celui dont on s'est servi pour calculer la Table des sinus, c'est-à-dire, que le rayon du cercle Z est divisé en autant de parties égales que le sinus total de cette Table en exprime; les nombres qui expriment dans cette même Table les valeurs des sinus des arcs qui sont les mesures des angles A, B & C du triangle ABC, exprimeront celles des demi-côtés FI, DH & DG du triangle DEF équiangle à ce triangle ABC. Ainsi voyez les N^{os} 1. & 2.

PROPOSITION II. Théorème.

114. Dans un triangle rectiligne quelconque, isoscele ou scalène, la somme des deux côtés inégaux est à la différence de ces deux mêmes côtés, comme

comme la tangente de la moitié de la somme des angles qui sont opposés à ses côtés, est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles.

Dans le triangle ABC *, la somme des côtés, par exemple, BC & BA, est à la différence de ces mêmes côtés, comme la tangente de la moitié de la somme des angles BAC & BCA est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles. * Fig. 17.

Constr. Du point B pris pour centre, & avec le plus petit BC des deux côtés proposés pris pour rayon, décrivez un cercle DCE. Tirez du point D au point C, une ligne droite DC. Tirez aussi du point A, une parallèle indéfinie AF à cette ligne DC (a). Prolongez le côté BA (a) E. l. 26 vers E, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point E E. 37 le cercle DCE. Tirez du point E par le point C, une ligne droite ECF qui rencontre en un point F la parallèle AF. Enfin décrivez un quart de cercle quelconque GHI. De l'extrémité I du rayon GI, élevez à ce même rayon une perpendiculaire indéfinie IL (b); & faites les angles LGI & KGI égaux aux angles EAF & CAF, chacun à chacun (c). (b) E. l. 26 p. 11 (c) E. l. 26 p. 23

Démonstr. Premièrement, la ligne EA est la somme des côtés BC & BA du triangle ABC; puisque les lignes BE & BC qui sont des rayons d'un même cercle DCE [c], sont égales. Et la ligne DA est la différence des deux mêmes côtés BC & BA; puisque les lignes BD & BC



qui sont aussi des rayons d'un même cercle DCE [c], sont aussi égales.

Secondement, l'angle BDC est égal à l'angle BCD (a); puisque [D] les côtés BC & BD du triangle DBC sont égaux. Or, la somme de ces deux angles est égale à celle des angles BAC & BCA (b); puisque l'angle B est commun aux triangles DBC & ABC. Donc l'angle BDC est égal à la moitié de la somme des angles BAC & BCA. Mais ce même angle BDC est aussi égal à l'angle EAF (c); puisque les lignes DC & AF sont parallèles [c]: & l'angle EAF est égal à l'angle LGI [c]. Donc l'angle LGI est aussi égal à la moitié de la somme des angles BAC & BCA; & par conséquent, puisque la ligne LI est la tangente de cet angle LGI (d), elle est celle de la moitié de la somme de ces angles BAC & BCA.

Troisièmement, l'angle BCD est égal à l'angle BDC [D]. Or l'angle BDC qui est extérieur au triangle ADC, est égal (e) à la somme des angles intérieurs DAC & DCA qui lui sont opposés. Donc l'angle BCD est égal à la somme des angles DAC & DCA; & par conséquent, si à ce premier angle & à la somme de ces deux derniers, on ajoute le même angle DCA, la somme des angles BCD & DCA, c'est-à-dire, l'angle BCA, sera égale à celle des angles DAC, DCA & DCA. Ainsi l'angle BCA surpasse l'angle DAC ou BAC de deux fois l'angle DCA; & par conséquent cet

l'angle DCA est la moitié de la différence des angles BAC & BCA. Mais ce même angle DCA est égal à l'angle CAF (a); puisque les lignes DC & AF sont parallèles [c]: & l'angle CAF est égal à l'angle KGI [c]. Donc l'angle KGI est égal à la moitié de la différence des angles BAC & BCA; & par conséquent, puisque la ligne KI est la tangente de cet angle KGI (b), elle est celle de la moitié de la différence de ces mêmes angles BAC & BCA. (a) E. 1. 1. P. 29. (b) N. 38.

Quatrièmement enfin, la ligne AF est parallèle à la ligne DC [c]; & l'angle DCE est droit (c), puisqu'il est inscrit dans un demi-cercle. Donc l'angle AFE est droit aussi (d). Ainsi, puisque la ligne IL est perpendiculaire au rayon GI [c], les triangles AEF & GLI qui ont l'angle EAF égal à l'angle LGI [c], ont aussi l'angle AFE égal à l'angle GIL: les triangles ACF & GKI qui ont l'angle CAF égal à l'angle KGI [c], ont pareillement l'angle AFC égal à l'angle GIK; & par conséquent ces deux premiers triangles sont équiangles, & ces deux derniers le sont aussi (e). Or, puisque les triangles AEF & GLI sont équiangles, AF : GL :: EF : LI (f). Et puisque les triangles ACF & GKI le sont aussi, AF : GI :: CF : KI (g). Donc EF : LI :: CF : KI (h); & par conséquent en échangeant (i), EF : CF :: LI : KI. Mais puisque la ligne DC est parallèle [c] au côté AF du triangle AEF, ED : DA :: EC : CF (k). Donc en composant, EA : DA :: O ij (c) E. 1. 3. P. 31. (d) E. 1. 1. P. 29. (e) E. 1. 1. P. 32. (f) E. 1. 6. P. 4. (g) E. 1. 6. P. 4. (h) E. 1. 5. P. 11. (i) E. 1. 5. P. 16. (k) E. 1. 6. P. 25.

(a) E. l. 5. EF ; CF (a) ; & par conséquent, EA : DA ::

(b) E. l. 5. LI : KI (b).

P. 11:

Or, EA est la somme des côtés BC, & BA du triangle ABC [D. 1.] : DA est la différence de ces mêmes côtés [D. 1.] : LI est la tangente de la moitié de la somme des angles BAC & BCA [D. 2.] : & KI est la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes angles [D. 3.] .
Donc C. Q. F. D.

S C H O L I E.

115. Si l'on suppose que le rayon GI est celui du cercle dont on s'est servi pour calculer la Table des sinus, les nombres qui expriment dans la Table des tangentes les valeurs des tangentes des arcs qui sont les mesures des angles EAF & CAF des triangles rectangles AEF & ACF, exprimeront celles des côtés LI & KI des triangles rectangles GLI & GKI, qui sont équiangles, l'un au triangle AEF, & l'autre au triangle ACE, & décrits chacun sur le rayon du cercle que l'on a pris pour construire la Table des sinus. Ainsi voyez les Nos 33 & 34.

P R O P O S I T I O N III. Théorème.

116. Dans un triangle rectiligne, le rectangle fait de deux côtés quelconques, est au rectangle fait des différences de ces deux mêmes côtés à la moitié de la somme des trois côtés, comme le carré du sinus total est à celui du sinus de la moitié de l'angle compris par ces deux premiers côtés.

* Fig. 12. Dans le triangle ABC, le rectangle fait des

côtés, par exemple AB & AC, est au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC, & de la différence du côté AC à cette même moitié, comme le carré du sinus total est à celui du sinus de la moitié de l'angle BAC.

Constr. Divisez (a) les angles BAC & BCA ^{(a) E. 1. 1. P. 9.} chacun en deux parties égales, par des lignes AN & CN. Du point N auquel ces lignes se rencontrent, abaissez aux côtés AB, AC & BC, les perpendiculaires ND, NE & NF (b). ^{(b) E. 1. 1. P. 12.} Du même point N pris pour centre, & avec l'une de ces perpendiculaires prise pour rayon, décrivez un cercle DEF. Du point B, abaissez une perpendiculaire BI (c) à la ligne AN ^{(c) E. 1. 1. P. 12.} prolongée vers G autant qu'il sera nécessaire. Prolongez cette perpendiculaire vers H, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point H le côté AC. Du point C, abaissez une perpendiculaire CG à la même ligne ANG (d). Du point I auquel ^{(d) E. 1. 1. P. 12.} la perpendiculaire BI rencontre la ligne ANG, tirez au côté AC (e) une parallèle IK, qui ren- ^{(e) E. 1. 1. P. 31.} contre en un point K la perpendiculaire CG. Du point L auquel la parallèle IK rencontre le côté BC, pris pour centre, & avec la ligne LI prise pour rayon, décrivez un cercle IFGKP. Enfin du point G, tirez au centre L de ce cercle, & au point F auquel la perpendiculaire NF rencontre le côté BC, les lignes droites GL & GF.

Démonstr. Les triangles AIB, AEN & AGG

(a) E. I. 1. font équiangles (a), puisqu'ils ont chacun un angle droit [c], que l'angle BAI du premier est égal à l'angle EAN du second [c], & que ce même angle EAN est commun au second & au troisième. Donc $AB : BI :: AN : NE$, $AC :$

(b) E. I. 6. $CG :: AN : NE$ (b); & par conséquent, si l'on multiplie chaque terme de la première de ces deux proportions, par chaque terme correspondant de la seconde, on aura cette nouvelle proportion : le rectangle fait de AB & de AC est au rectangle fait de BI & de CG, comme

(c) E. I. 6. le carré de AN est au carré de NE (c).

P. 22.

(d) N. 112. Or (d) AN est à NE, comme le sinus de l'an-

(e) N. 8. gle AEN, c'est-à-dire, le sinus total (e), est au sinus de l'angle EAN qui est la moitié de l'an-

P. 9.

gle BAC [c]. Ainsi il ne s'agit plus que de démontrer que le rectangle fait de BI & de CG, est égal au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC, & de la différence du côté AC à cette même moitié; ce que l'on peut faire de la manière suivante.

Premièrement, dans les triangles AIB & AIH, le côté AI est commun, l'angle BAI est égal [c] à l'angle HAI. & l'angle BIA à l'angle HIA.

(f) E. I. 1. Ainsi le côté BI est égal au côté HI (f). Or ce côté HI & la ligne CK sont deux côtés d'un quadrilatère HCKI, & ce quadrilatère est un parallélogramme, puisque ses côtés HC & IK sont parallèles [c], & que les lignes BH & CG étant perpendiculaires, chacune à la même

P. 26.

DE TRIGONOMETRIE. III

ligne AG [c], les autres côtés HI & CK sont aussi parallèles (a). Donc le côté HI est égal à la ligne CK (b); & par conséquent les lignes BI & CK sont égales. (a) E. 1. 1.
(b) E. 1. 1.
P. 28.
P. 34.

Secondement, dans les triangles BIL & CKL, le côté BI est égal au côté CK [D], l'angle LBI à l'angle LCK, & l'angle LIB à l'angle LKC (c), puisque les lignes BH & CG sont parallèles [c]. Ainsi le côté LB est égal au côté LC, & le côté LI au côté LK (d). Or, puisque les côtés LI & LK sont égaux, l'hypoténuse IK du triangle IGK qui est rectangle en G [c], est divisée également au point L. Ainsi le cercle décrit de ce point pris pour centre, & avec la ligne LI prise pour rayon, passe par le sommet de l'angle G (e) & par le point K; & par conséquent les lignes LI, LG & LK sont égales. (c) E. 1. 1.
(d) E. 1. 1.
(e) E. 1. 3.
P. 29.
P. 26.
P. 31.

Troisièmement, l'angle BAC est double de l'angle GAC [c], & l'angle GAC est égal à l'angle GIL (f), puisque les lignes IK & AC sont parallèles [c]. Donc l'angle BAC est double de l'angle GIL. Or l'angle GLK est aussi double du même angle GIL (g), puisqu'il est l'angle extérieur du triangle ILG dont les côtés LI & LG sont égaux entr'eux [D. 2.]. Donc l'angle GLK est égal à l'angle BAC; & par conséquent, puisque les lignes IK & AC sont parallèles [c], les lignes GL & BA le sont aussi (h).

Quatrièmement, les triangles OFN & OGC (b) E. 1. 11.
P. 10.

font rectangles, l'un en F & l'autre en G [c];
 (a) E. 1. 1. & les angles FON & GOC sont égaux (a), puis-
 P. 15. qu'ils sont opposés au sommet. Donc ces trian-
 gles sont équiangles (b); & par conséquent les
 (b) E. 1. 1. côtés OF & ON du premier, sont proportion-
 P. 32. nels aux côtés OG & OC du second (c). Mais
 (c) E. 1. 6. ces côtés sont aussi ceux des angles FOG & NOC
 P. 4. des triangles FOG & NOC, & ces angles sont
 (d) E. 1. 1. égaux (d), puisqu'ils sont opposés au sommet.
 P. 15. Donc les triangles FOG & NOC sont aussi
 (e) E. 1. 6. équiangles (e); & par conséquent l'an-
 P. 6. gle OGF du premier est égal à l'angle OCN
 du second. Or, cet angle OCN est la moitié
 de l'angle ACB du triangle ABC [c]. Donc
 l'angle OGF est égal à la moitié de l'angle ACB;
 & par conséquent, puisque l'angle LGI du
 triangle ILG qui est isoscele [D. 2.], est égal
 (f) E. 1. 1. à l'angle GIL (f), & que l'angle GIL est égal
 P. 5. [D. 3.] à l'angle GAC qui est aussi la moitié de
 l'angle BAC du triangle précédent ABC [c],
 l'angle FGL qui est la somme de ces an-
 gles OGF & LGI, est égal à la moitié OCN
 & GAC de la somme des angles ACB & BAC
 du triangle ABC.

[Cinquièmement, dans les triangles FLG
 (g) E. 1. 1. & ABC, l'angle FLG est égal à l'angle ABC (g),
 P. 29. puisque les lignes GL & BA sont parallèles [D. 3.];
 & l'angle FGL est égal à la moitié OCN
 & GAC de la somme des angles ACB &
 BAC [D. 4.]. Donc l'angle GFL est égal à
 l'autre moitié ACN & GAB de la somme des
 mêmes

mêmes angles ACB & BAC (a); & par consé- (a) E. 1. 2.
quent les angles FGL & GFL sont égaux. Or, P. 32.
puisque ces derniers angles sont égaux,
les côtés LF & LG du triangle FLG se sont
aussi (b). Ainsi, le cercle décrit du point L pris (b) E. 1. 2.
pour centre, & qui passe par le point G, passe P. 6.
aussi par le point F; & par conséquent puisque
les lignes LB & LC sont égales (D. 2.), les li-
gnes BF & CP se sont aussi.

Sixièmement enfin, les lignes CG & CF
traversent le cercle IFGKP, & sont tirées d'un
même point C hors de ce cercle à sa circonfé-
rence [D. 5.]. Ainsi, le rectangle fait de CK & de
CG est égal au rectangle fait de CF & de CP (c); (c) E. 1. 3.
& par conséquent, puisque CK est égal à BI [D. 1.], P. 36.
& que CP l'est à BF [D. 5.], le rectangle fait
de BI & de CG, est égal au rectangle fait de CF
& de BF. Or, CF est la différence du côté AB à
la moitié de la somme des trois côtés du trian-
gle ABC, & BF est la différence du côté AC
à cette même demie somme. Car, puisque les
côtés AB, AC & BC de ce triangle sont des
tangentes au cercle DEF, les lignes BF & BD
sont égales, de même que les lignes AE
& AD, & les lignes CF & CE (d); & (d) E. 1. 3.
par conséquent, les lignes BF & AE prises en- P. 36.
semble, sont égales au côté AB: les lignes AE
& CF prises ensemble, au côté AC: & les li-
gnes BF, AE & CF prises ensemble, à la moitié
de la somme des trois côtés AB, AC & BC.
Donc C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Des Problèmes de la Trigonométrie-rectiligne.

117. **L**es parties inconnues dans un triangle ne peuvent se conclure des parties connues, que dans les cas auxquels ces parties connues ne laissent aucune *ambiguïté*; c'est-à-dire, sont suffisantes pour faire connoître que le triangle dont il s'agit ne peut être que tel triangle, & où l'on peut par conséquent en construire un qui lui soit entièrement égal. Or, on ne peut être certain de l'égalité entière de deux triangles rectilignes quelconques, que de l'une des quatre manières suivantes, sçavoir. Premièrement, lorsque l'on connoît que *l'un des angles du premier & l'un des angles du second sont égaux; & que les côtés qui forment cet angle du premier & ceux qui forment cet angle du second le sont aussi, chacun à chacun* (a).

(a) E. I. 1.
P. 4.

Secondement, lorsque l'on sçait que *l'un des angles du premier est égal à l'un des angles du second; & que deux des côtés du premier & deux des côtés du second sont égaux, chacun à chacun, & opposés à des angles de même espèce* (b). Troisièmement, lorsque l'on sçait que

(b) E. I. 6.
P. 7.

l'un des côtés du premier est égal à l'un des côtés du second; & que deux des angles du premier semblablement posés à deux des angles du second, sont égaux à ces deux angles du se-

(c) E. I. 1.
P. 26.

cond, chacun à chacun (c). Quatrièmement

DE TRIGONOMETRIE. 115

Enfin, lorsque l'on connoît que les côtés du premier sont égaux à ceux du second, chacun à chacun (a). Ainsi, l'on ne peut construire un triangle rectiligne qui soit entièrement égal à un autre, que lorsqu'on connoît dans cet autre un angle avec les côtés qui forment cet angle : ou un angle & deux côtés quelconques, avec l'espace des autres angles : ou un côté avec deux angles : ou enfin, les trois côtés. Par conséquent, il faut toujours connoître trois des six parties que l'on peut considérer dans un triangle rectiligne quelconque, pour pouvoir trouver chacune des trois autres. Mais de ces trois parties connues, deux seulement sont de suite : ou toutes le sont : ou enfin toutes sont séparées les unes des autres. Donc, on peut réduire tous les problèmes de la Trigonométrie-rectiligne aux trois suivans, qui dépendent, l'un de la première proposition du chapitre précédent (b); l'autre, (c) N. 112. de la seconde (c); & le dernier, de la troisième (d) N. 116. me (d).

PROBLÈME I.

118. Trouver les parties inconnues d'un triangle-rectiligne quelconque, dont il n'y a que deux des parties connues qui soient de suite.

Lorsque deux seulement des trois parties connues dans un triangle rectiligne quelconque sont de suite, ces parties connues ne peuvent être que deux angles & un côté; & l'on cherche les autres côtés : (car l'autre angle est alors connu, puisque (e) les trois angles d'un trian-

(a) E. I. 1.
p. 32.

116 TRAITE COMPLET

gle-rectiligne quelconque, pris ensemble, valent toujours 180 degrés:) ou deux côtés, & un angle opposé à l'un de ces côtés; & l'on cherche ou les autres angles, ou l'autre côté. Ainsi ce problème a trois cas.

Premier Cas.

119. Connoissant dans un triangle-rectiligne quelconque, deux angles & un côté, trouver les autres côtés.

Fig. 19. On donne dans le triangle ABC, l'angle A de 50 d. 15 m. l'angle B de 67 d. 32 m. avec le côté AC de 75 2 ¹/₂ toises; & il faut trouver les autres côtés AB & BC †.

Solution. 1^{ent}. Le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle C, comme le côté AC est au côté AB (a).

(a) N. 112. té AB (a).

Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante,

(b) N. 107. le côté AB (b).

Complément du logarithme du sinus de l'angle B	
donné de 67 d. 32 m.	0.0342801
Log. du sinus de l'angle C trouvé § de 62 d. 13 m.	9.9468042
Logarithme du côté AC donné de 75 2 ¹ / ₂ T.	2.8765068

Logarithme du côté demandé AB	12.8575908
-------------------------------	------------

(c) N. 100. qui (c) donnera 720 ³⁷/₁₀ toises, ou 729 toises 2, piéds 7 pouces p. m. pour la valeur de ce côté.

† Dans les figures, on marque par une petite ligne les parties connues; & par un petit cercle, la partie que l'on cherche.

(d) E. l. 1. § On trouve la valeur de l'angle C (d), en retranchant de 180 degrés la somme 117 deg. 47 min. des angles A & B qui sont donnés.

2^{es}. Le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A, comme le côté AC est au côté BC (a). (a) N. 112.

Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante, le côté BC (b). (b) N. 107.

Complément du logarithme du sinus de l'angle B
donné de 67 d. 32 m. 0.0342801

Logarithme du sinus de l'angle A donné
de 50 d. 15 m. 9.8858370

Logarithme du côté AC donné de 752 $\frac{1}{2}$ T. - - - 2.8765065

Logarithme du côté demandé BC - - - - 12.7966236

qui (c) donnera 626 $\frac{492}{640}$ toises, ou 626 toises 0 pieds 5 pouces (c) N. 100.
p. p. pour la valeur de ce côté.

SCHOLIE I.

120. Si au lieu de donner dans le triangle ABC*, les angles A & B, on donnoit les angles A & C; il n'y auroit de même dans ce triangle que deux des parties connues qui seroient de suite. Car on ne doit compter dans un problème pour parties connues, que celles qui contribuent immédiatement à faire trouver la partie inconnue. Or, dans le triangle ABC, l'angle A ne contribue point immédiatement à faire connoître le côté AB; ni l'angle C à faire connoître le côté BC. Ainsi, lorsqu'il s'agit de trouver le côté AB, on ne doit compter pour parties connues que les angles B & C, avec le côté AC: de même que lorsqu'il s'agit de trouver le côté BC, on ne doit compter que les angles A & B, avec le même côté AC. Par conséquent, soit que l'on donne dans un triangle rectiligne quelconque ABC, les angles A & B, avec le côté AC; soit que l'on y donne les angles A & C, avec le même côté AC,

* Fig. 19.

il n'y aura toujours dans ce triangle, que deux des parties connues qui seront de suite.

SCHOLIE II.

- * Fig. 20. 121. Si le triangle ABC * est rectangle, cela ne change rien à la règle précédente, puisque l'on a pareillement ces deux proportions : le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle C, comme le côté AC est au côté AB : & le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A, comme le côté AC est au côté BC (a).

Ainsi, si dans le premier triangle qui est rectangle en B, on donne l'angle A de 51 deg. 40 m. avec le côté AC de 943 toises; Premièrement, (b) N. 105. on trouvera de la manière suivante, le côté AB(b).

Logarithme du sinus du complément † de l'angle A donné de 51 d. 40 m.	- - - - -	9.7925566
Logarithme du côté AC donné de 943 T.	- - - - -	2.9745117

Logarithme du côté demandé AB	- - - - -	2.7670683
-------------------------------	-----------	-----------

(c) N. 100. qui (c) donnera 584¹¹⁷/₂₁₃ toises, ou 584 toises 3 pieds 3 pouces 1 p. p. pour la valeur de ce côté.

Secondement, on trouvera de la manière suivante, le côté BC (d).

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 51 d. 40 m,	- - - - -	9.8945463
Logarithme du côté AC donné de 943 T.	- - - - -	2.9745117

Logarithme du côté demandé BC	- - - - -	2.8690580
-------------------------------	-----------	-----------

bN. 100. qui (c) donnera 739⁴¹¹/₅₇₀ toises, ou 739 toises 4 pieds 2 pouces 3 p. p. pour la valeur de ce côté.

(f) E. 1. 1. † Comme dans un triangle rectangle, les angles aigus sont réciproquement complément l'un de l'autre (f), de même que les arcs qui se correspondent sur les *reles* & les *verse* des feuillets des

Tables (g), on trouve dans les Tables la valeur de l'angle C, en y cherchant celle de l'angle donné A.

112. Et si dans le second triangle qui est rectangle en C*, on donne l'angle A de 50 d. *Fig. 20.
43 m. avec le côté AC de 638 toises; Premièrement, on trouvera de la manière suivante, (a) N. 110,
le côté AB (a).

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 50 d. 43 m. - 0.1984894
Logarithme du côté AC donné de 638 T. 2.8048207

Logarithme du côté demandé AB - - - 3.0033101
qui (b) donnera 1007¹⁴⁰³/₂₁₅₃ toises, ou 1007 toises 3 pieds 11 pouces (b) N. 98.
p. m. pour la valeur de ce côté.

Secondement, on trouvera de la manière suivante, le côté BC (c). (c) N. 107.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 50 d. 43 m. - - 0.1984894
Logarithme du sinus du même angle A - - 9.8887547
Logarithme du côté AC donné de 638 T. 2.8048207

Logarithme du côté demandé BC - - - 2.8920648
qui (d) donnera 779²⁶¹⁸/₂₇₆₅ toises, ou 779 toises 5 pieds 8 pouces p. p. (d) N. 100.
pour la valeur de ce côté.

123. Cependant, lorsque le côté donné AC* *Fig. 20.
est adjacent à l'angle droit C, comme dans le second triangle, on peut se servir de la Table des tangentes, pour trouver l'autre côté BC adjacent au même angle; puisque, suivant ce qui a été dit dans le premier chapitre de la seconde section du livre précédent (e), le sinus total est (c) N. 33.
à la tangente de l'angle A, comme le côté AC est au côté BC.

Ainsi, l'on pourra trouver ce côté BC, de la
 (a) N. 105. *manière suivante (a) qui est la plus courte.*

Logarithme de la tangente de l'angle A donné	
de 50 d. 43 m. - - - - -	10.0871441
Logarithme du côté AC donné de 638 T.	2.8048207
	<hr/>
Logarithme du côté demandé BC - - -	12.8920648

(b) N. 122. *qui est le même que celui de la règle précédente (b), & donne par conséquent le même nombre $779\frac{465}{2783}$ pour la valeur de ce côté.*

SCHOLIE III.

124. *Enfin, on peut trouver les quatrièmes termes des proportions précédentes, & généralement de toutes celles que l'on propose dans ce Traité, en multipliant leur second terme par leur troisième terme ; & en divisant ensuite le produit, par leur premier terme, suivant l'usage ordinaire.*

Ainsi, l'on peut, par exemple, trouver le quatrième terme 720 toises 2 pieds 7 poudes p. m. de la première proportion du N° 119, en multipliant le sinus 88471.66 de l'angle C,*
 * Fig. 19. *par le côté AC qui est donné de 752 toises ; & en divisant ensuite le produit 6657492415, par le sinus 92410.20 de l'angle B.*

Mais, c'est toujours le plus court de se servir des logarithmes, & de prendre le complément de celui du premier terme, conformément à ce que nous avons dit au chapitre cinquième de la dernière section du livre précédent (c).
 (c) N. 104.

Second Cas.

125. *Connoissant dans un triangle rectiligne quelconque, deux côtés avec un angle opposé à l'un*

On de ces côtés, trouver les autres angles.

On donne dans le triangle ABC *, le côté AB de 572 toises, le côté BC de 837 toises, avec l'angle C de 38 deg. 47 min. & il faut trouver les autres angles A & B. * Fig. 21.

Solution. Le côté AB est au côté BC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A (a). (a) N. 111.

Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante (b), le logarithme du sinus de ce dernier angle. (b) N. 107.

Complément du logarithme du côté AB donné de 572 T.	- - - - -	7.2426040
Logarithme du côté BC donné de 837 T.	- - - - -	2.9227254
Logarithme du sinus de l'angle C donné de 38 d. 47 m.	- - - - -	9.7968359

Logarithme du sinus de l'angle demandé A - 19.9621653

qui (c) donnera 66 deg. 25 m. 48 s. p. p. pour la valeur de cet angle, ou pour celle de son supplément. Mais comme les parties connues dans le triangle proposé, ne déterminent point auquel des deux cette valeur appartient, puisque ces parties conviennent également & au premier triangle qui est acutangle, & au second qui est obtusangle, la résolution de ce second cas n'est possible, que lorsqu'on connoît l'espèce de l'angle qu'il faut trouver. (c) N. 103.

126. OR, lorsque l'on aura trouvé l'angle A, on connoîtra l'angle B (d), en retranchant la somme des angles A & C de celle de deux angles droits; c'est-à-dire, de 180 degrés. (d) E. 1. 1.

Ainsi, cet angle B sera de 74 deg. 47 min. 14 sec. p. m. dans le premier triangle; & de 17 deg. 38 min. 46 sec. p. p. dans le second.

Q

S C H O L I E.

* Fig. 22. 127. Si le triangle ABC * est rectangle, on a pareillement cette proportion : le côté AB est au côté BC, comme le sinus de l'angle C est (a) N. 112. au sinus de l'angle A (a).

Ainsi, si l'on donne l'hypoténuse AB de 837 toises, avec le côté BC de 694 toises, on trouvera de la manière suivante (b), l'angle A.

Complément du logarithme du côté AB donné de 837 T.	- - - - -	7.0772746
Logarithme du côté BC donné de 694 T.	-	2.8413595

Logarithme du sinus de l'angle demandé A	-	9.9186341
--	---	-----------

(c) N. 103. qui (c) donnera 56 deg. 0 m. 42 f. p. p. pour la valeur de cet angle ; & par conséquent 33 d. 59 m. 18 f. p. m. pour celle (d) N. 121† de l'angle B (d).

Or, dans ce cas il n'y aura point d'ambiguïté, puisque l'angle C étant droit [H], les autres angles A & B seront nécessairement aigus (e).

(e) E. 1. p. 17.

Troisième Cas.

128. Connoissant dans un triangle-rectiligne quelconque, deux côtés avec un angle opposé à l'un de ces côtés, trouver l'autre côté.

* Fig. 23. On donne dans le triangle ABC*, le côté AB de 490 toises, le côté BC de 728 toises, avec l'angle C de 36 deg. 29 min. & il faut trouver l'autre côté AC.

DE TRIGONOMETRIE. 123

Solution. Cherchez (a) la valeur de l'angle A †. (a) N. 123.
Cherchez (b) ensuite celle de l'angle B. Enfin, (b) N. 126.
cherchez (c) le côté demandé AC. (c) N. 129.

1^{ent} { Complément du logarithme du côté AB
donné de 490 T. - - - - - 7.3098039
(a) { Logarithme du côté BC donné de 728 T. - 2.8621314
Log. du sin. de l'angle C donné de 36 d. 29 m. 9.7742168
(d) N. 107.
Logar. du sinus de l'angle cherché A - - 29.9461521

qui (e) donnera 62 d. 3 m. 14 f. pour la valeur de cet angle, (e) N. 103.
dans le premier triangle, où il est aigu.

2^{ent} { Valeur trouvée de l'angle A - - - 62 d. 3 m. 14 f.
(f) { Valeur donnée de l'angle C - - - 36 29 0
Valeur de deux angles droits - 180 0 0
Somme des angles A & C - - 98 32 14 (f) N. 126.
Valeur de l'angle B - - - 81 27 46

3^{ent} { Complément du logarithme du sinus de
l'angle C donné de 36 d. 29 m. - - 0.2157832
(g) { Logarithme du sinus de l'angle B trouvé
de 81 d. 27 m. 46 f. ‡ - - - 9.9951610
Logarithme du côté AB donné de 490 T. 2.6901961 (g) N. 107.
Logarithme du côté demandé AC - - 22.9111403

qui (h) donnera 814⁵¹⁵⁷/₅₃₃₀ toises, ou 814 toises 5 pieds 9 pou- (h) N. 100.
ces ²/₃, p. m. pour la valeur de ce côté, dans le premier triangle.

129. MAIS, s'il s'agit du côté AC * du Fig. 23.
second triangle, dans lequel l'angle A est obtus;
alors le même log. précédent 9.9461521 [s. 1.],

† Puisque ce troisième cas dépend du second, sa résolution
est possible, que lorsque celle du second l'est aussi (i). (i) N. 125.
‡ Voyez le N. 91.

Qij

(a) N. 6. donnera (a) 117 deg. 56 m. 46 f. pour la valeur de cet angle. Ainsi :

(b) N. 126.	2 ent (b)	Valeur trouvée de l'angle A	- -	117 d. 56 m. 46 f.
		Valeur donnée de l'angle C	- -	36 29 0
		Valeur de deux angles droits	- -	180 0 0
		Somme des angles A & C	- -	154 25 46
		Valeur de l'angle B	- - - -	25 34 14

(c) N. 107.	3 ent (c)	Complément du logarithme du sinus du supplément de l'angle A † trouvé de 117 d. 56 m. 46 f.	- - - -	0.0538479
		Logarithme du sinus de l'angle B trouvé de 25 d. 34 m. 14 f.	- - - -	9.6351038
		Logarithme du côté BC donné de 728 T.	- - - -	2.8621314
		Logarithme du côté demandé AC	- - - -	12.5510831

(d) N. 100. qui (d) donnera 355 ⁸⁵¹⁹/₁₂₂₁₀ toises, ou 355 toises 4 pieds 2 pouces ⁷/₈ p. p. pour la valeur de ce côté, dans le second triangle.

SCHOLIE I.

Fig. 24. 130. Si le triangle ABC * est rectangle, cela ne change rien à la manière dont on vient de dire qu'il faut s'y prendre pour trouver le troisième côté AC.

Ainsi, si l'on donne l'hypoténuse AB de 837 toises, avec le côté BC de 694 toises, on

(e) N. 127. cherchera l'angle B (e); & l'on trouvera en-

† On peut prendre l'angle C & le côté AB pour chercher le côté AC, de même qu'on l'a fait dans la proportion précédente (f). Mais nous nous sommes servis de l'angle obtus A, afin de donner des exemples de tous les cas qui peuvent se rencontrer. A l'égard des log. des sinus des angles A & B, voyez les Nos 27 & 92.

DE TRIGONOMETRIE. 125

faite de la manière suivante, le côté AC. (a). (a) N. 105.

Logar. du sinus de l'angle B trouvé
 le 33 d. 59 m. 18 f. (b) - - - - - 9.7474305 (b) N. 92.
 Logar. du côté AB donné de 337 T. - - - - - 2.9227254
 Logarithme du côté demandé AC - - - - - 2.6701559
 qui (c) donnera 467 ²¹⁹/₉₁₉ Toises, ou 467 Tois. 5 pieds, 5 pouces, p. p. (c) N. 100.
 pour la valeur de ce côté.

Mais on peut aussi trouver ce même côté, par le théorème suivant.

Théorème.

131. Dans un triangle rectangle, le carré fait sur l'un quelconque des petits côtés, est égal au rectangle fait de la somme de l'autre petit côté & de l'hypoténuse, & de la différence de cet autre petit côté à cette même hypoténuse.

Dans le triangle ABC *, le carré du côté BC est égal au rectangle fait de la somme de l'autre côté AC & de l'hypoténuse AB, & de la différence de cet autre côté AC à cette même hypoténuse AB. * Fig. 24.

Constr. Du point A pris pour centre, & avec le côté AC pris pour rayon, décrivez un cercle CDE. Prolongez ensuite l'hypoténuse AB vers D, jusqu'à ce qu'elle rencontre en un point D, la circonférence de ce cercle.

Démonstr. Le côté BC est tangent au cercle CDE (d), puisque l'angle C est droit [H]. (d) E. 1. 3. P. 16.
 ainsi, le carré de ce côté est égal (e) au rectangle fait de la sécante BD & de sa partie BE. (e) E. 1. 6. P. 36.

Or, la sécante BD est la somme du côté AC & de l'hypoténuse AB ; puisque les lignes AD & AC qui [c] sont rayons du même cercle CDE, sont égales : & la partie BE est la différence du même côté AC à la même hypoténuse AB, puisque les lignes AE & AC qui sont aussi rayons du même cercle CDE [c], sont aussi égales. Donc, le carré du côté BC est égal au rectangle fait de &c. & par conséquent C. Q. F. D.

132. Ainsi, si l'on suppose un cercle décrit
 • Fig. 24. du point B * pris pour centre, & avec le côté BC pris pour rayon, on pourra trouver de la manière suivante, qui est la plus courte, le même côté AC.

I ^{ant}	Valeur donnée du côté AB - - - - -	837 T.
	Valeur donnée du côté BC - - - - -	694
	Somme de ces deux côtés - - - - -	1531
	Différence de ces deux mêmes côtés - - -	143

(a) N. 53. 2 ^{ent}	Logarithme de la différence des côtés AB & BC, trouvée de 143 T. - - - -	2.1553360
	Logarithme de la somme de ces mêmes côtés, trouvée de 1531 T. - - -	3.1849752
	Somme de ces deux logarithmes, ou (a) log. du carré du côté demandé AC - -	5.3403112
	Moitié de cette somme, ou (b) logarithme de ce côté - - - - -	2.6701556

qui est le même † que l'on a trouvé au N° 130 ; & qui donne par conséquent le même nombre 467⁵¹⁹/₃₂₉ pour la valeur de ce côté.

- † Ce logarithme est plus petit de 3 unités que celui que l'on a trouvé pour ce même côté AC au N° 130 ; parce que l'angle A étant (c) d'un peu plus de 56 deg. 0 min. 42 f. l'angle B qui a servi à trouver ce côté AC, devoit être d'un peu moins de 33 deg. 59 min. 18 f. Mais ces différences sont absolument insensibles.
- (c) N. 127.

134. On peut remarquer que toutes les règles de proportion que l'on vient de faire dans ce problème, ont chacune pour premier terme, celle des parties connues qui est opposée à l'une des autres parties connues.

Problème II.

135. Trouver les parties inconnues d'un triangle rectiligne quelconque, dont toutes les parties connues sont de suite.

Lorsque toutes les parties connues dans un triangle rectiligne quelconque sont de suite, ces parties ne peuvent être qu'un angle & les côtés qui forment cet angle; puisque si elles étoient un côté & les angles adjacents à ce (a) N. 120. côté, il n'y en auroit (a) que deux qui seroient de suite. Ainsi, l'on ne peut chercher que les autres angles, ou l'autre côté; & par conséquent ce Problème n'a que deux cas.

Premier Cas.

136. Connoissant dans un triangle rectiligne quelconque, un angle avec les côtés qui forment cet angle, trouver les autres angles.

Fig 25. On donne dans le triangle ABC, l'angle A de 39 deg. 37 m. le côté AB de 476, toises, avec le côté AC de 234 toises; & il faut trouver les autres angles B & C.

Solution. La somme des côtés AB & AC est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles C & B, est à la tangente de la moitié de la différence de ces mêmes

(b) N. 114. angles (b).

Ainsi

Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante, moitié de cette différence.

1 ^{er}	Valeur donnée du côté AB	-	-	-	-	-	476 $\frac{1}{2}$ T.
	Valeur donnée du côté AC	-	-	-	-	-	234
2 ^{em}	Somme de ces deux côtés	-	-	-	-	-	710 $\frac{1}{2}$
	Différence de ces deux mêmes côtés	-	-	-	-	-	242 $\frac{1}{2}$
3 ^{em}	Valeur de deux angles droits	-	-	-	-	-	180 d. 0 m. 0 s.
	Valeur donnée de l'angle A	-	-	-	-	-	39 37 0
4 ^{em}	Somme (a) des angles C & B	-	-	-	-	-	140 23 0 (a) E. l. 11
	Moitié de cette somme	-	-	-	-	-	70 11 30 P. 32
5 ^{em}	Complément du logarithme de la somme des côtés AB & AC, trouvée de 710 $\frac{1}{2}$ T.	-	-	-	-	-	7.1484359
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 242 $\frac{1}{2}$ T.	-	-	-	-	-	2.3847117
	Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles C & B, trouvée de 70 deg. 11 m. 30 s.	-	-	-	-	-	10.4434726 (b) N. 107
	Logarithme de la tangente de la moitié de la différence cherchée	-	-	-	-	-	19.9766201
(c) qui donnera 43 d. 27 m. 30 s. p. p. pour la valeur de cette (c) N. 103							
moitié.							

137. Mais, de deux quantités quelconques, la plus grande est toujours la moitié de leur somme, plus la moitié de leur différence ; & la plus petite au contraire, est toujours la moitié de cette même somme, moins la moitié de cette même différence †. Donc, puisqu'on connoît la demi-somme 70 d. 11 m. 30 s. des deux angles de-

† Si l'on divise en deux également en un point D*, la somme ABC de deux quantités quelconques ; que nous représentons par les lignes droites AB & BC, les lignes AD & DC représenteront chacune la moitié de cette somme. Et si sur la ligne AB qui représente la plus grande de ces deux quantités, on prend la partie AE égale à la plus petite qui est représentée par la ligne BC, le reste EB sera aussi divisé en deux également au même point D ; puisque [c] les lignes AE & BC seront égales, de même que

* Fig. 16.

mandés B & C, avec leur demi-différence que l'on vient de trouver de 43 d. 27 m. 30 f. si l'on ajoute à cette demi-somme cette demi-différence, on aura 113 deg. 39 m. pour la valeur du plus grand de ces deux angles; (c'est-à-dire, de l'angle C (a), puisque c'est lui qui est opposé au plus grand des deux côtés connus): & si l'on retranche au contraire de cette même demi-somme, cette même demi-différence, le reste 26 deg. 44 m. fera la valeur du plus petit de ces deux mêmes angles, c'est-à-dire, de l'angle B.

(a) E. l. I.
p 18.

S C H O L I E.

* Fig. 27. 138. Si le triangle ABC * est rectangle, cela ne change rien à la règle précédente, puisque l'on a pareillement cette proportion : la somme des côtés AC & CB est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles B & A, est à la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles (b).

(b) N. 114.

Ainsi, si l'on donne le côté AC de 248 toises, & le côté BC de 417 ; on trouvera de la manière suivante, la moitié de la différence des angles B & A.

1 ent.	{	Valeur donnée du côté CB	- - - -	417 T.
		Valeur donnée du côté AC	- - - -	248
		Somme de ces deux côtés	- - - -	665
		Différence de ces deux mêmes côtés	- - - -	169

les lignes AD & DC le sont [c]. Par conséquent, la ligne DB représentera la moitié de la différence de ces deux mêmes quantités. Or, la ligne AB est la même chose que la ligne AD, plus la ligne DB; & la ligne BC est la même chose que la ligne DC, moins la ligne DB. Donc, *de deux quantités, &c.*

Complément du logarithme de la somme des côtés AC & CB, trouvée de 665 T.	7.1771784	
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 169 T. - - - -	2.2278867
	Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles A & B, trou- vée de 45 d. †: - - - -	(a) N. 107.
	Logarithme de la tangente de la moitié de la différence cherchée - - - -	9.4050651
(b) donnera 14 deg. 15 min. 32 s. p. p. pour la valeur de (b) N. 103. sa moitié ; & par conséquent on trouvera (c) que l'angle de- (c) N. 137. mandé A est de 59 deg. 15 m. 32 s. p. p. & que l'autre angle de- mandé B est de 30 deg. 44 min. 28 s. p. m.		

139. Mais, suivant ce qui a été dit au N° 33 : le côté AC * est au côté BC, * Fig. 27. comme le sinus total est à la tangente de l'angle A : & le côté BC est au côté CA, comme le sinus total est à la tangente de l'angle B.

Ainsi, l'on pourra aussi trouver de la manière suivante (d) qui est la plus courte, celui de ces deux (d) N. 110 angles que l'on voudra ; par exemple, l'angle B.

Complément du logarithme du côté BC donné de 417 T. - - - - -	7.3798640
Logarithme du côté CA donné de 248 T. -	2.3944517

Logarithme de la tangente de l'angle demandé B 9.7743157
qui (e) donnera de même que la règle précédente (f) 30 d. 44 min. (e) N. 103.
28 s. p. m. pour la valeur de cet angle ; & par conséquent 59 d. (f) N. 137.
15 min 32 s. p. p. pour celle de l'angle A.

Second Cas.

140. Connoissant dans un triangle-rectiligne quelconque, un angle avec les côtés qui forment cet angle, trouver l'autre côté.

† Comme la tangente d'un angle de 45 deg. est égale au sinus total, on la supprime dans tous les cas auxquels on peut supprimer ce sinus (g).

132 TRAITE' COMPLET

Fig. 28. On donne dans le triangle ABC *, l'angle A de 49 deg. 23 min. le côté AB de 371 toises, avec le côté AC de 532 toises; & il faut trouver l'autre côté BC.

(a) N. 136. Solution. Cherchez (a) l'un ou l'autre des angles B & C; & vous trouverez ensuite (b) le côté demandé BC. Ainsi :

1 ^{ent}	Valeur donnée du côté AC	-	-	-	532 T
	Valeur donnée du côté AB	-	-	-	371
	Somme de ces deux côtés	-	-	-	903
	Différence de ces deux mêmes côtés	-	-	-	161

2 ^{ent}	Valeur de deux angles droits	-	-	180 d. 0 m. 0 f.
	Valeur donnée de l'angle A	-	-	49 23 0
	Somme (c) des angles B & C	-	-	130 37 0
	Moitié de cette somme	-	-	65 18 30

(c) E. l. 1.
p. 32.

3 ^{ent}	Complément du logarithme de la somme des côtés AB & AC, trouvée de 903 T.	7.0443123
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 161 T.	2.2068259
	Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles B & C trouvée de 65 d. 18 m. 30 f.	10.3374571
	Logarithme de la tangente de la moitié de la différence cherchée	19.5885953

(e) N. 103. qui (e) donnera 21 deg. 11 min. 44²/₃ sec. p. p. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent (f) 86 deg. 30 min. 14²/₃ sec. p. p. pour la valeur de l'angle B, & 44 deg. 6 min. 45¹/₃ sec. p. m. pour celle de l'angle C.

4 ^{ent}	Complément du logarithme du sinus de l'angle B trouvé de 86 d. 30 m. 14 ² / ₃ f.	0.0008089
	Logarithme du sinus de l'angle A donné de 49 d. 23 m.	9.8802887
	Logarithme du côté AC donné de 532 T.	2.7259116
	Logarithme du côté demandé BC	2.6070098

(g) N. 107. qui (h) donnera 404 ⁶²⁷⁷/₁₀₇₄₀ toises, ou 404 toises 3 pieds 6 pouces p. p. pour la valeur de ce côté.

SCHOLIE I.

141. Si le triangle dont il s'agit est rectangle, cela ne change rien à la manière dont on vient de dire qu'il faut s'y prendre pour trouver le côté demandé. Mais on peut aussi alors le trouver par la seconde scholie du troisième cas du premier problème (a); quoique le plus court, lorsqu'il s'agit de nombres un peu considérables, soit de le chercher de la manière dont on vient de le faire. (a) N. 133.

SCHOLIE II.

142. On peut aussi résoudre ce second cas par la dernière proposition du chapitre précédent (b); puisque suivant ce qui a été démontré (b) N. 116. dans cette proposition; le carré du sinus total est au carré du sinus de la moitié de l'angle A*, comme le rectangle fait des côtés AB & AC est au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC, & de la différence du côté AC à cette même moitié. Ainsi: *Fig. 28.

1 ^{ent}	{	Valeur donnée du côté AC	- - - -	532 T.
		Valeur donnée du côté AB	- - - -	371
		Somme de ces deux côtés.	- - - -	903
		Différence de ces deux mêmes côtés.	- - - -	161
		Moitié de cette différence	- - - -	80½
		Carré de cette moitié	- - - -	6480¼
2 ^{ent}	{	Valeur donnée de l'angle A	- - - -	49 d. 23 m. 0 s.
		Valeur de la moitié de cet angle	- - - -	24 41 30

(a) N. 60.	Double (a) du logarithme du sinus de la moitié de l'angle A, trouvée de 24 d. 41 m. 30 l.	19.2418016
	Logarithme du côté AB donné de 371 T.	2.5693739
	Logarithme du côté AC donné de 532 T.	2.7259116
(b) N. 109.	3 ent } Logarithme du rectangle fait des différences des côtés AB & AC à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC	24.5370871
(c) N. 99.	qui (c) donnera $34441\frac{1139}{1261}$ toises quarrées pour la valeur de ce rectangle.	

Or, la différence des côtés de ce même rectangle est connue, puisque ces côtés étant chacun (d) ce qui reste de la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC, après en avoir retranché chaque côté AB & AC, leur différence doit être (e) E l. 2. la même que celle de ces derniers côtés. Donc (e).
P. 5.

Rectangle fait des différences des côtés AB & AC à la moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC, trouvé de	$34441\frac{1139}{1261}$ T.
Quarré de la moitié de la différence des côtés de ce rectangle, trouvée de $80\frac{1}{2}$ T.	$6480\frac{1}{4}$
Quarré de la moitié d'une ligne composée de ces derniers côtés	$40922\frac{771}{5044}$
Racine seconde de ce quarré, ou valeur de cette moitié	$202\frac{737}{153}$
Moitié de la différence de ces mêmes côtés	$80\frac{1}{2}$
Grand côté du rectangle, ou différence du plus petit côté donné AB du triangle ABC, à la moitié de la somme des trois côtés de ce triangle	$282\frac{999}{1261}$
Plus petit côté donné AB	371
Moitié de la somme des trois côtés du triangle ABC	$65\frac{999}{1261}$

DE TRIGONOMETRIE. 135

Somme de ces trois côtés - - - - -	1307 ²³⁷ ₁₂₄₁
Somme des côtés donnés AB & AC - - - - -	903
Valeur du côté demandé BC - - - - -	404 ²³⁷ ₁₂₄₁

ou 404 toises 3 pieds 6 pouces , p. p.

Mais cette manière est extrêmement longue.

Problème III.

143. *Trouver les parties inconnues d'un triangle rectiligne quelconque, dont toutes les parties connues sont séparées les unes des autres.*

Lorsque toutes les parties connues dans un triangle rectiligne quelconque sont séparées les unes des autres, ces parties ne peuvent être que les trois angles ; & l'on cherche les rapports que les côtés ont entr'eux † : ou les trois côtés ; & l'on cherche les angles. Ainsi, ce Problème n'a que deux cas.

Premier Cas.

144. *Connoissant chaque angle d'un triangle rectiligne quelconque , trouver les rapports que les côtés ont entr'eux.*

On donne dans le triangle ABC*, l'angle, A * Fig. 29. de 57 deg. 28 m. l'angle B de 79 deg. 57 m. avec l'angle C de 42 deg. 35 m. & il faut

† Comme l'égalité des angles détermine seulement les triangles rectilignes à être semblables , & ne les nécessite point à être égaux ; lorsque l'on ne connoitra que chaque angle d'un triangle rectiligne quelconque, on pourra bien trouver les rapports que les côtés de ce triangle auront entr'eux , puisque l'on pourra trouver la valeur de chaque côté d'un triangle qui lui sera équiangulaire (s.), & qui donnera par conséquent ces rapports. Mais (s) N. 1. on ne pourra connoître la grandeur d'aucun de ses côtés, puisqu'on n'aura rien qui détermine cette grandeur.

136 TRAITE' COMPLET

trouver les rapports que les côtés AB , A & BC ont entr'eux.

Solution. Cherchez dans la Table les sinus des angles A , B & C ; & ces sinus auront entr'eux (a) les rapports demandés.

Ainsi AB : AC : : 6766618 : 9846558
AB : BC : : 6766618 : 8430787 ; & AC :
BC : : 9846558 : 8430787.

Second Cas.

145. Connoissant chaque côté d'un triangle rétiligne quelconque , trouver les angles.

* Fig. 30. On donne dans le triangle ABC , le côté AB de 504 toises, le côté AC de 1029 toises, avec le côté BC de 826 toises ; & il faut trouver chacun des angles A , B & C.

Solution. Le rectangle fait des côtés AB & AC, est au rectangle fait de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés AB , AC & BC , & de la différence du côté AC à cette même moitié ; comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de la moitié de l'angle A (b).

Ainsi , l'on trouvera cet angle, de la manière suivante.

I ent	Valeur donnée du côté AB - - - -	504 T.
	Valeur donnée du côté AC - - - -	1029
	Valeur donnée du côté BC - - - -	826
	-----	-----
	Somme de ces trois côtés - - - -	2359
	Moitié de cette somme - - - -	1179 $\frac{1}{2}$
	Différence du côté AB à cette moitié -	675 $\frac{1}{2}$
	Différence du côté AC à cette même moitié - - - -	150 $\frac{1}{2}$
		Complément

Complément du logarithme du côté AB donné de 504 T.	- - - - - 7.2975695
Complément du Logarithme du côté AC donné de 1029	- - - - - 6.9875846
Logarithme de la différence du côté AB, trouvée de 675½ T.	- - - - - 2.8296253
Logarithme de la différence du côté AC, trouvée de 150½ T.	- - - - - 2.1775365

Logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle demandé A - - - 19.2923159
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle - - 9.6461579

qui (b) donnera 26 d. 16. m. 46 f. p. pour la valeur de cette (a) N. 103.
moitié; & par conséquent, 52 d. 33 m. 32 f. pour celle de cet angle.

Lorsqu'on aura trouvé l'angle A, on cherchera de la manière suivante (b), l'angle C §. (b) N. 119.

Complément du logarithme du côté BC donné de 226 T.	- - - - - 7.0530200
Logarithme du côté AB donné de 504 T.	- - - - - 2.7024305
Logarithme du sinus de l'angle A trouvé de 52 d. 33 m. 32 f. (c).	- - - - - 9.8998087 (c) N. 92.

Logarithme du sinus de l'angle demandé C - - 19.6852592
qui (d) donnera 28 deg. 58 min. 38 f. p. m. pour la valeur de (d) N. 103.
cet angle.

Enfin, lorsque l'on aura trouvé les angles A & C, on trouvera l'angle B de 98 deg. 27 m.

† La somme des compléments des logarithmes des côtés AB & AC au sinus total, est la même chose que le complément de la somme de ces deux mêmes logarithmes au double du logarithme du sinus total.

§ Si lorsqu'il s'agit de trouver chaque angle d'un triangle-rectiligne, on n'a pas commencé par chercher celui qui est opposé au plus grand côté, il faut toujours ensuite chercher immédiatement celui qui est opposé au plus petit des deux côtés qui restent; afin d'éviter l'ambiguïté dans laquelle on tomberoit, si l'on faisoit autrement, & qui disparoit par ce moyen; puisque si l'un des angles d'un triangle-rectiligne est obtus, ce ne peut être (e) E. 1. r. p. 18. & 17.
que celui qui est opposé au plus grand côté (e).

50 f. en retranchant de 180 deg. la somme

(a) E. 1. 3. 81 deg. 32 m. 10 f. des angles A & C (a).

P. 32.

S C H O L I E I.

* Fig. 31. 146. Si le triangle ABC * est isofcele, cela ne change rien à la règle précédente, puisque l'on a pareillement cette proportion; le rectangle fait des côtés AB & AC est au rectangle fait

(b) N. 116. de la différence, &c. (b). Mais il est alors plus court de supposer une perpendiculaire BD abaissée du sommet de l'angle inégal ABC du triangle dont il s'agit, au côté opposé AC; parce que cette perpendiculaire divisant ce côté en deux

(c) E. 1. 6. parties égales AD & DC (c), on connoitra dans chacun des triangles rectangles ABD & CBD, le côté qui sera opposé à l'angle droit D, avec celui qui sera la moitié de ce même côté AC. Ainsi, l'on pourra trouver par le N° 127, l'angle ABD ou l'angle CBD; & connoître par conséquent l'angle ABC, qui sera le double de l'un de ces angles; & les angles A & C

(d) E. 1. 1. qui (d) sont chacun la moitié de la différence de cet angle ABC à la somme de deux angles droits.

P. 32.

Ainsi, si l'on donne les côtés AB & BC chacun de 707 toises, avec le côté AC de 648 toises, on trouvera de la manière suivante, chacun des angles B, A & C.

Complément du logarithme du côté AB donné de 707 T. - - - - -

Logarithme du côté AD trouvé de 324 T. 7.1505206

Logarithme de l'angle cherché ABD - - - 9.6611256

(e) N. 103. qui (e) donnera 27 deg. 16 min. 33 sec. p. m. pour la valeur de cet angle; & par conséquent 54 deg. 33 min. 6 sec. pour celle de l'angle demandé B; & 62 deg. 43 min. 27 sec. pour celle de chacun des autres angles demandés A & C.

147. On se sert ordinairement du théorème suivant, pour résoudre ce second cas.

THEOREME.

148. Dans un triangle scalène, le plus grand côté est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces deux autres côtés est à celle des segments † du premier.

Dans le triangle ABC*, le plus grand côté AC est à la somme des deux autres côtés AB & BC, comme la différence de ces deux derniers côtés est à celle des segments du premier. * Fig. 32.

Constr. Du point B, abaissez (a) une perpendiculaire BD au côté AC. Du même point B, pris pour centre, & avec le plus petit des deux autres côtés, pris pour rayon, (c'est-à-dire, avec le côté BC) décrivez un cercle FGCE. Enfin, prolongez le côté AB, jusqu'à ce qu'il rencontre en un point E, la circonférence de ce cercle. (a) E. l. 1. p. 12.

Démonstr. Les lignes droites AC & ABE traversent le cercle FGCE, & sont tirées d'un même point A hors de ce cercle, à sa circonférence [c]. Ainsi, le rectangle fait de la sécante AC & de sa partie AG, est égal au rectangle fait de la sécante ABE & de sa partie AF (b); (b) E. l. 3. & par conséquent (c) $AC : ABE :: AF : AG$. P. 36. Or [H], AC est le plus grand côté du triangle ABC. (c) E. l. 6. p. 16.

† Dans un triangle rectiligne, on appelle Segments d'un côté quelconque AC*, les parties AD & DC, en lesquelles ce côté est divisé par une perpendiculaire BD qui lui seroit abaissée du sommet de l'angle opposé B. * Fig. 32.

140 *TRAITE' COMPLET*

ABE est la somme des autres côtés AB & BC de ce triangle ; puisque les lignes BE & BC qui sont [c] rayons du même cercle FGCE, sont égales : AF est la différence de ces deux autres côtés ; puisque les lignes BF & BC qui sont aussi [c] rayons du même cercle FGCE, sont aussi égales : enfin, AG est la différence des segments AD & DC du plus grand côté AC ; puisque la perpendiculaire BD qui [c] est abaissée du centre B du cercle FGCE à la corde GC, divise cette corde en deux parties égales DG & DC (a). Donc le plus grand côté AC est à la somme & c. & par conséquent C. Q. F. D.

149. Ainsi, si l'on veut se servir de ce théo-
 * Fig. 32. rême pour trouver chaque angle A*, B & C du triangle ABC, dont on donne le côté AB de 826 toises, le côté BC de 504 toises, & le côté AC de 1029 toises ; on opérera de la manière suivante.

1 ^{ent}	Valeur donnée du côté AB	826 T.
	Valeur donnée du côté BC	504
2 ^{ent}	Somme de ces deux côtés	1330
	Différence de ces deux mêmes côtés	322
	Complément du logarithme du plus grand côté AC donné de 1029 T.	6.9875846
	Logarithme de la somme des côtés AB & BC, trouvée de 1330 T.	3.1238516
	Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 322 T.	2.5078559
	Logarithme de la différence cherchée AG des parties du plus grand côté AC	22.6192922

(b) N. 100. qui (b) donnera $416\frac{27}{100}$ toises ; ou $416\frac{11}{18}$ toises p. p. pour cette différence.

DE TRIGONOMETRIE. 141

Or, en retranchant du côté AC qui est donné de 1029 toises, cette différence AG que l'on vient de trouver de $416\frac{1}{11}$ toises p. p. il restera $612\frac{12}{11}$ toises p. m. pour la corde CG, dont la moitié $306\frac{6}{11}$ toises p. m. sera la valeur du plus petit segment DC. Ainsi, dans le triangle DBC, on connoitra le côté BC opposé à l'angle droit D, de 504 toises, avec le côté DC de $306\frac{6}{11}$ toises p. m. & par conséquent on trouvera de la manière suivante (a) l'angle DBC.

(a) N. 127.

Compl. du log. du côté BC, donné de 504 T.	7.2975695	
Log. du côté DC trouvé de $306\frac{6}{11}$ T. p. m. (b)	2.4862960	(b) N. 84.

Logarithme du sinus de l'angle cherché DBC 9.7838655

qui (c) donnera 37 deg. 26 min. 28 s. pour la valeur de cet angle; (e) N. 103.
& par conséquent (d), 52 deg. 33 min. 32 sec. pour celle de l'angle (d) E. L. 1.
demandé C. P. 32.

On trouvera ensuite les angles A & B, de la même manière dont on a trouvé les angles C & B au N° 145.

150. Mais il faut remarquer, que cette manière de trouver les angles d'un triangle dont les côtés sont connus, est plus longue que celle que nous avons enseignée au N° 145. Ainsi, nous ne démontrons ici le théorème sur lequel elle est fondée, que par rapport à l'utilité dont il peut être dans le Toisé & dans l'Arpentage, pour trouver la perpendiculaire d'un triangle dont on a mesuré les côtés.

CHAPITRE III.

Des Usages de la Trigonométrie rectiligne.

PROBLEME PRE' LIMINAIRE

151. **M**ESurer un angle sur le terrain.
 * Fig. 33. Il faut mesurer l'angle FEG *, formé sur le terrain par des lignes droites tirées du point E aux points F & G.

Solution. Placez un *Graphomètre* † au sommet E de l'angle proposé ; & disposez-le de manière qu'en regardant par les pinnules qui sont aux extrémités de la règle fixe AB, vous apperceviez le point F. Assurez l'instrument dans cette position ; & dirigez la règle mobile CD vers G, de manière qu'en regardant par les pinnules qui sont aux extrémités de cette autre règle, vous apperceviez le point G. Enfin, examinez combien

† Le *Graphomètre* est un instrument de cuivre, qui est composé
 * Fig. 33. d'un demi-cercle ADB *, de deux règles AB & CD, & d'un genou qui sert à poser cet instrument sur son pied, dans telle situation que l'on veut. Le demi-cercle est divisé en 180 deg. dont chacun est subdivisé, au moins en 10 parties égales. Les deux règles, (dont la première qui est fixe, est le diamètre de ce demi-cercle ; & l'autre qui est mobile, tourne sur le centre B de ce même-demi-cercle,) ont à chacune de leurs extrémités une petite lame de cuivre, qui est perpendiculaire à leur plan. Ces lames ont chacune une petite fente que l'on appelle *Pinnule*, & qui sert à diriger le rayon visuel. Enfin, on ajuste ordinairement une Boussole à cet instrument ; & il faut remarquer que l'on ne doit guères compter sur son exactitude, lorsqu'il a moins d'un pied de diamètre.

l'arc DB qui est compris entre les règles AB & CD, contient de degrés & de parties de degrés; & la valeur de cet arc sera celle de l'angle proposé FEG.

I. USAGE.

152. *Mesurer la distance de deux points, dont il y en a un qui est inaccessible.*

On est placé au point A*; & l'on veut sça- * Fig. 34.
voir de combien ce point est éloigné du point B.

Solution. Prenez dans la campagne un point D à volonté, (mais qui soit cependant tel qu'on puisse y aller directement du point A); & après y avoir fait planter un piquet DC, mesurez (a) l'angle BAC formé par les rayons (a) N. 137. visuels tirés du point A aux points B & C. Faites ensuite planter un piquet au point A; & mesurez la distance † de ce point au point C. Enfin, mesurez (b) l'angle ACB formé par les (b) N. 151. rayons visuels tirés du point C aux points A & B.

Par ce moyen, dans le triangle ACB formé par les rayons visuels AC & CB, & par la distance proposée AB, vous connoîtrez le côté AC, avec les angles BAC & ACB; ainsi vous trouverez cette distance (c). (c) N. 119.

II. USAGE.

153. *Mesurer la distance de deux points*

† La distance ou le côté AC*, que l'on peut mesurer, & dont * Fig. 34.
on peut voir réciproquement les deux extrémités, se nomme la 24. Elle ne doit jamais être moins que le quart ou le cinquième de la distance que l'on veut mesurer.

qui sont tous les deux inaccessibles ; mais qui peuvent être vus des extrémités d'une même base.

*Fig. 35. Il faut mesurer la distance des points A * & B qui sont inaccessibles , mais qui peuvent être vus des extrémités d'une même base.

Solution. Après avoir pris dans la campagne deux points E & F à volonté , (mais qui soient cependant tels que l'on puisse aller de l'un à l'autre directement , & le plus parallèlement † à la distance AB qu'il sera possible ,) faites planter au point F un piquet FD. Mesurez ensuite (a) l'angle ACB formé par les rayons visuels tirés du point C aux points A & B ; & l'angle ACD formé par les rayons visuels tirés du même point C aux points A & D. Faites aussi planter un piquet au point E ; & mesurez la distance de ce point au point F. Enfin , mesurez (b) l'angle CDA formé par les rayons visuels tirés du point D aux points C & A ; & l'angle CDB formé par les rayons visuels tirés du même point D aux points C & B.

Par ce moyen , 1^{ent} dans le triangle ACD formé par les rayons visuels CA , CD & DA , vous connoîtrez le côté CD ou EF , avec les angles ACD & CDA ; ainsi vous trouverez le côté AC (c). 2^{ent} Dans le triangle CDB formé par les rayons visuels CB , CD & DB , vous

† On prend une base la plus parallèle qu'il est possible à la distance que l'on veut mesurer , afin d'éviter les angles trop aigus , ou trop obtus.

connoîtrez

connoîtrez le côté CD, avec les angles BCD & CDB; ainsi vous trouverez le côté BC (a), ^{(*) N. 1194}
 3^{me} Enfin, dans le triangle ACB formé par les rayons visuels CA & CB, & par la distance proposée AB, vous connoîtrez les côtés AC & BC, avec l'angle ACB; ainsi vous trouverez cette distance (b). (b) N. 1404

III. U S A G E :

154. *Mesurer la distance de deux points qui sont tous les deux inaccessibles, & ne peuvent être vus des extrémités d'une même base.*

Il faut mesurer la distance des points A & B qui sont inaccessibles, & ne peuvent être vus des extrémités d'une même base. * Fig. 364

Solution. Choisissez entre les points A & B, dont on vous propose de mesurer la distance, plusieurs points C, D, E, &c. que l'on puisse observer de fort loin; tels que sont les Clochers, les Tours, les Moulins, &c. Ensuite :

Premièrement, par le moyen d'une base GH, mesurez (c) la distance du point A au point C, ^{(c) N. 1534} celle du point H au même point C, & l'angle ACH. Par le moyen d'une autre base IK, mesurez (d) la distance du point C au point D; celle du point I au point C, celle du point K ^{(d) N. 1534} au point D, l'angle ICD, & l'angle CDK. Enfin, par le moyen d'une troisième base prise telle qu'elle conviendra à la position des points

† Cet angle est la différence des angles ACB & ACD, que l'on a mesurés.

(a) N. 152. H & I, mesurez (a) la distance de ces deux
 153. derniers points.

Par-là, 1^{ent} dans le triangle HCI formé par les rayons visuels HC, HI & IC, vous connoîtrez les trois côtés HC, HI & IC; ainsi vous trouverez l'angle HCI (b). 2^{ent} Dans le triangle ACD formé par les distances du point A au point C, du point C au point D, & du point A au même point D, vous connoîtrez les côtés AC & CD, avec l'angle ACD qui est la somme des angles ACH, HCI & ICD; ainsi vous trouverez (c) le côté AD, (b) N. 140. & l'angle CDA.

Secondement, par le moyen d'une base LM, (d) N. 153. mesurez (d), la distance du point D au point E, celle du point L au point D, celle du point M au point E, l'angle LDE, & l'angle DEM. Et par le moyen d'une autre base prise telle qu'elle conviendra à la position des points K & L, (e) N. 152. mesurez (e) la distance de ces deux derniers
 153. points.

Par-là, 1^{ent} dans le triangle KDL formé par les rayons visuels KD, KL & LD, vous connoîtrez les trois côtés KD, KL & LD; (f) N. 145. ainsi vous trouverez l'angle KDL (f). 2^{ent} Dans le triangle ADE formé par les distances du point A au point D, du point D au point E, & du point A au même point E, vous connoîtrez les côtés AD & DE, avec l'angle ADE qui est la différence de la somme des an-

gles ADK †, KDL & LDE à celle de quatre angles droits; ainsi vous trouverez (a) le côté AE, (a) N. 140. & l'angle AED.

Troisièmement, comme la distance du point A au point E commence à devenir considérable par rapport à celle du point B au point F, il est à propos de comparer cette dernière à la distance du point F au point B; afin de mettre le plus d'égalité qu'il est possible entre les côtés des triangles. Ainsi, par le moyen d'une base NO, mesurez (b) la distance du point E au point F, (b) N. 153. celle du point N au point E, celle du point O au point F, l'angle NEF, & l'angle EFO. Par le moyen d'une autre base PQ, mesurez (c) la (c) N. 153. distance du point F au point B, celle du point P au point F, & l'angle PFB. Enfin, par le moyen d'une troisième base prise telle quelle conviendra à la position des points P & O, mesurez (d) la distance de ces deux derniers points, (d) N. 153. ou 153.

Par-là, 1^{re} dans le triangle OFP formé par les rayons visuels OF, OP & PF, vous connoîtrez les trois côtés OF, OP & PF; ainsi vous trouverez l'angle OFP (e). 2^{re} Dans le triangle EFB (e) N. 145. formé par les distances du point E au point F, du point F au point B, & du point E au même point B, vous connoîtrez les côtés EF & FB, avec l'angle EFB qui est la différence de la somme des angles EFO, OFP & PFB à celle

† Cet angle est la différence de l'angle CDA à l'angle CDE; que l'on a trouvés.

148 TRAITE' COMPLET

de quatre angles droits ; ainsi vous trouverez

(a) N. 140. (a) le côté EB, & l'angle FEB.

Quatrièmement enfin , par le moyen d'une base prise telle qu'elle conviendra à la position des points M & N , mesurez (b) la distance de ces deux points. Et par-là , 1^{er} dans le triangle MEN formé par les rayons visuels ME, MN & NE, vous connoîtrez les trois côtés ME, MN & NE, ainsi vous trouverez l'angle MEN (c).

(c) N. 145. 2^{er} Dans le triangle AEB formé par les distances du point A au point E, du point E au point B, & du point A au même point B, vous connoîtrez les côtés AE & EB, avec l'angle AEB qui est la somme des angles AED, DEM, MEN, NEF & FEB ; ainsi vous trouverez (d) la distance demandée AB.

(d) N. 140. distance demandée AB.

SCHOLIE.

155. On peut voir par cet exemple comment on doit s'y prendre, soit pour mesurer la distance de deux endroits qui seroient encore plus éloignés l'un de l'autre que ne le sont les points A & B, & entre lesquels il faudroit par conséquent choisir un plus grand nombre de points remarquables ; soit pour mesurer celle de deux autres lieux

A & B qui seroient séparés l'un de l'autre par une Forêt, ou par quelque autre obstacle qui empêcheroit qu'on ne les vît tous les deux des extrémités d'une même base. Mais il faut ajouter à la

(e) N. 154. solution que nous venons de donner (e) , les deux remarques suivantes , sans lesquelles on se tromperoit considérablement.

La première, est que nous avons supposé dans un même plan les distances AC*, CD; DE, &c. & les rayons visuels HC, IC, ID, &c. Parce qu'autrement, l'angle ACD ne seroit point la somme des angles ACH, HCI & ICD; ni l'angle ADE la différence de la somme des angles ADK, KDL & LDE à celle de quatre angles droits; ni &c. Cependant ces lignes n'y sont presque jamais. Ainsi, il faut nécessairement commencer par les y réduire, avant que de calculer aucun des triangles ACD, ADE, EFB & AEB.

* Fig. 36.

Or pour cet effet, après avoir supposé un plan qui passe par les points A, H & B, on observera (soit par quelqu'un des N^{os} suivans, 170 171 ou 172; soit d'une autre manière,) 1^o. De combien le point C est plus ou moins élevé que le point H: 2^o. De combien les points I, K & D sont plus ou moins élevés que le point C: 3^o. De combien les points L, M & E sont plus ou moins élevés que le point D: 4^o. De combien les points P & F sont plus ou moins élevés que le point B: 5^o. Enfin, de combien les points N, O & F sont plus ou moins élevés que le point E.

Ensuite, 1^{er} si le point C* est plus ou moins élevé que le point A, la distance réduite de ces deux points sera le côté AR d'un triangle rectangle ACR, qui aura pour autre côté la différence de hauteur CR; & pour hypoténuse, la distance AC qui est connue par le calcul. Ainsi l'on trouvera cette distance AR, par le N^o 132. Or la dis-

* Fig. 37.

tance réduite des points H & C, sera pareillement le côté HR d'un triangle rectangle HCR, qui aura pour autre côté la même différence de hauteur CR; & pour hypoténuse, le rayon visuel HC qui est aussi connu par le calcul. Ainsi, l'on trouvera aussi cette distance par le même N° 132. Et comme dans le triangle ARH, tous les côtés AR, AH & HR seront alors connus, on trouvera l'angle ARH, par le N° 145.

* Fig. 37. 2^{ent} Si le point I* est plus ou moins élevé que le point C, (de manière cependant que ces deux points soient tous les deux au dessus du plan AHB, ou tous les deux au-dessous :) leur distance réduite sera encore le côté IS d'un triangle rectangle ICS, qui aura pour autre côté la différence CS des différences de hauteur IT & CR; & pour hypoténuse, le rayon visuel IC qui est connu par le calcul. Ainsi, l'on trouvera encore cette distance par le même N° 132. On cherchera aussi la distance réduite HT des points H & I, de la même manière dont on vient de s'y prendre pour trouver celle des points H & C. Et l'on trouvera ensuite par le même N° 145, l'angle HRT, du triangle HRT dont tous les côtés HR, HT

(a) E. l. I.
P. 34.

* Fig. 38. 3^{ent} Si le point D* est plus ou moins élevé que le point C, de manière que l'un de ces points étant au-dessus du plan AHB, l'autre soit au-dessous (par exemple C au-dessus, & D au-dessous;) alors la hauteur CR du point C, la profondeur DV du point D, le rayon visuel CD, &

la distance réduite RV de ces deux points, formeront deux triangles RCZ & VDZ, qui seront rectangles (a), l'un en R & l'autre en V ; & par conséquent équiangles (b), puisque les angles RZC & VZD seront égaux (c). Ain- si (d), CR sera à DV, comme CZ est à ZD. Donc en composant (e), CR & DV ensemble seront à DV, comme CZ & ZD ensemble, à-dire CD) sont à ZD. Or, CR, DV & CD sont connues. Donc on trouvera : 1°. par une règle de proportion, la partie ZD du rayon visuel CD : 2°. par une soustraction, l'autre partie CZ de ce même rayon visuel : 3°. par le N° 132, les côtés RZ & ZV des triangles rectangles RCZ & VDZ : 4°. enfin, par une addition, la distance réduite RV des points C & D.

4^{es} On continuera à réduire au plan AHB * les autres distances ID, KD, LD, ED, &c. & à trouver les angles qu'elles formeront après leur réduction ; de la même manière dont nous venons de faire l'un & l'autre, dans les trois exemples précédents, qui renferment tous les cas qui peuvent se rencontrer. Et l'on aura l'attention de ne faire les calculs des triangles ACD, ADE, EFB & AEB, qu'avec ces distances réduites, & ces angles réduits.

La seconde, est que la vraie distance du point A * au point B étant en vigueur, l'arc du grand cercle de la Terre qui est compris entre ces deux points, la ligne AB est seulement la corde

* Fig. 36.

* Fig. 36.

qui soutend cet arc. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'une distance un peu considérable, on doit avoir égard à la différence de cette corde à cet arc.

- Or, pour cet effet, après avoir mesuré cette
- (a) N. 154. corde (a), on la considère comme étant la base du triangle isoscele dont chaque côté est un demi-
- (b) N. 329. diamètre de la Terre, que l'on sçait être (b) de
- (c) N. 146. 3 276 344 toises. On cherche ensuite (c) la valeur de celui des angles de ce triangle, qui est opposé à cette même corde. Enfin, comme cette valeur est aussi celle de l'arc qui est compris entre les points dont on cherche la distance, puisque cet arc est la mesure de cet angle, on la multiplie par 57 180; c'est-à-dire, par le nombre de
- (d) N. 329. toises que contient (d) chaque degré d'un grand cercle de la Terre; & le produit donne la vraie distance de ces points.

IV. USAGE.

156. Percer une route dans une Forêt.

- * Fig. 39. Il faut percer dans la Forêt X*, une route qui aille directement du point A au point B.

Solution. Choisissez de même que dans l'usage précédent (e), des points remarquables C, D & E, interposés entre les points A & B, que l'on suppose ne pouvoir point être vus des extrémités d'une même base. Ensuite:

- Premièrement, par le moyen d'une base FG,
- (f) N. 153. mesurez (f) la distance du point A au point C, celle du point G au même point C, & l'angle ACG. Par le moyen d'une autre base HI,
- (g) N. 151. mesurez (g) la distance du point C au point D, celle

telle du point H au point C, celle du point I au point D, l'angle HCD, & l'angle CDI. Enfin, par le moyen d'une troisième base prise telle qu'elle conviendra à la position des points G & H, mesurez (a) la distance de ces deux derniers points. (a) N. 1524 ou 1531

Par-là, 1^{ent} dans le triangle GCH formé par les rayons visuels GC, GH & HC, vous connoîtrez les trois côtés GC, GH & HC; ainsi vous trouverez l'angle GCH (b). 2^{ent} Dans le triangle ACD formé par les distances du point A au point C, du point C au point D, & du point A au même point D, vous connoîtrez les côtés AC & CD, avec l'angle ACD qui est la différence de la somme des angles ACG, GCH & HCD à celle de quatre angles droits; ainsi vous trouverez le côté AD, & les angles ADC & DAC (c). (b) N. 1454 (c) N. 1404

Secondement, par le moyen d'une base MN, mesurez (d) la distance du point B au point E, celle du point N au même point E, & l'angle BEN. Par le moyen d'une autre base KL, mesurez (e) la distance du point E au point D, celle du point K au point E, celle du point L au point D, l'angle KED, & l'angle LDE. Enfin, par le moyen d'une troisième base prise telle qu'elle conviendra à la position des points N & K, mesurez (f) la distance de ces deux derniers points. (d) N. 1534 (e) N. 1534 (f) N. 1524 ou 1534

Par-là, 1^{ent} dans le triangle NEK formé par les rayons visuels NE, NK & KE, vous

154 TRAITE' COMPLET

- connoîtrez les trois côtés NE , NK & KE ,
 (a) N. 145. ainsi vous trouverez l'angle NEK (a). 2^{ent} Dans le triangle BED formé par les distances du point B au point E , du point E au point D , & du point B au même point D , vous connoîtrez les côtés BE & ED , avec l'angle BED qui est la différence de la somme des angles BEN , NEK & KED à celle de quatre angles droits ; ainsi
 (b) N. 140. vous trouverez (b) le côté BD , & l'angle EDB.

Troisièmement, par le moyen d'une base prise telle qu'elle conviendra à la position des points I & L , mesurez (c) la distance de ces deux points.
 (c) N. 152. Et par-là , 1^{ent} dans le triangle IDL formé par
 ou 153. les rayons visuels ID , IL & LD , vous con-

- noîtrez les trois côtés ID , IL & LD ; ainsi
 (d) M. 145. vous trouverez l'angle IDL (d). 2^{ent} Dans le triangle ADB formé par les distances du point A au point D , du point D au point B , & du point A au même point B , vous connoîtrez les côtés AD & BD , avec l'angle ADB qui est la différence de la somme des angles ADC , CDI , IDL , LDE & EDB à celle de quatre angles
 (e) N. 136. droits ; ainsi , vous trouverez (e) l'angle BED ; & par conséquent l'angle BAC , qui est la somme des angles BAD & DAC.

Quatrièmement enfin , posez un Graphomètre au point A. Dirigez sa règle fixe , vers le point C. Ouvrez ensuite sa règle mobile , de manière qu'elle forme avec la règle fixe , un angle égal à l'angle trouvé BAC ; & la route que vous ferez percer suivant l'alignement de

cette règle mobile , sera la route demandée.

S C H O L I E.

Nous avons supposé dans cet usage (de même que nous l'avons fait dans le précédent (a), & (a) N. 154. pour les mêmes raisons,) que tous les points A*, C, D, E, B, F, G, H, &c. étoient dans un même plan ; soit naturellement , soit par réduction.

V. U S A G E.

157. Mesurer la hauteur d'un objet dont le pied † est accessible, & de niveau avec le lieu auquel on est placé.

Il faut mesurer la hauteur AB* de l'objet X dont le pied A est accessible, & de niveau avec le lieu auquel on est placé. * Fig. 40.

Solution. Prenez dans la campagne un point E à volonté ; mais qui soit cependant de niveau avec le pied A de l'objet X , & tel que l'on puisse aller directement de ce point au pied de cet objet. Posez-y un Graphomètre ; & par le moyen d'un plomb suspendu au bout d'un fil, disposez-le de manière que son plan étant vertical, la règle fixe soit parfaitement horizontale. Assurez l'instrument dans cette position ; & dirigez la règle mobile, vers le sommet B de l'objet proposé, de manière qu'en regardant par les fentes des pinnules qui sont aux extrémités de cette règle, vous apperceviez le sommet B.

† Par le Pied d'un objet , nous entendons le point auquel un plomb suspendu du haut de cet objet par le moyen d'un fil, rencontreroit le plan sur lequel ce même objet est élevé.

156 TRAITE' COMPLET

Examinez combien l'arc qui est compris entre la règle fixe & la règle mobile, contient de degrés & de parties de degrés. Enfin, mesurez la distance du pied E de l'instrument au pied A de l'objet.

Par ce moyen, dans le triangle CBD formé par la ligne horizontale CD, par le rayon visuel CB, & par la partie BD de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté CD ou EA, l'angle BCD, & l'angle BDC qui est droit [H]; ainsi vous trouverez (a) cette partie BD, à laquelle ajoutant la hauteur EC ou DA du pied de l'instrument, la somme sera cette hauteur demandée.

VI. USAGE.

158. *Mesurer la hauteur d'un objet dont le pied est inaccessible, mais de niveau avec le lieu auquel on est placé.*

Il faut mesurer la hauteur AB* de l'objet X dont le pied A est inaccessible, mais de niveau avec le lieu auquel on est placé.

Solution. Prenez dans la campagne un point E à volonté, mais qui soit cependant de niveau avec le pied A de l'objet proposé; & disposez-y un Graphomètre de la même manière dont (b) N. 157; on l'a fait pour le cinquième usage (b). Mesurez l'angle BCD formé par la ligne horizontale CD, & par le rayon visuel tiré du point C au sommet B de l'objet X. Laissez le Graphomètre dans cette position, & en regardant par les fentes des pinnules qui sont aux extrémités

De la règle fixe , faites planter dans l'alignement de la ligne horifontale CD un piquet FG, qui foit à une diftance du point E fuffifante pour donner une bafe d'une grandeur raifonnable au triangle CBG. Transportez le Graphomètre au point F, & après l'y avoir difpofé de la même manière qu'il l'étoit au point E, mefurez l'angle BGD formé par la ligne horifontale GD, & par le rayon vifuel tiré du point G au même point précédent B. Enfin , mefurez la diftance du point E au point F.

Par ce moyen , 1^{ent} dans le triangle CBG formé par les rayons vifuels CB & GB, & par la ligne horifontale CG , vous connoîtrez le côté CG , l'angle BCD , & l'angle BGC qui eft le fupplément de l'angle BGD ; ainfi vous trouverez le côté BG. (a). 2^{ent} Dans le (a) N. 119: triangle GBD formé par le rayon vifuel GB, par la ligne horifontale GD & par la partie BD de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté BG , l'angle BGD , & l'angle BDG qui eft droit [H] ; ainfi, vous trouverez (b) cette (b) N. 119: partie BD, à laquelle ajoutant la hauteur EC ou DA du pied de l'instrument, la fomme fera cette hauteur demandée.

Autre folution, qui n'exige qu'un feul point E* * Fig. 42: de niveau avec le pied A de l'objet propofé.

159. APRES avoir mefuré l'angle BCD de la même manière dont on a dit dans la folution précédente qu'il falloit le faire , choisissez dans la campagne un point F à volonté, mais

158 TRAITE' COMPLET

qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point E ; & faites-y planter un

- (a) N. 151. piquet FG. Mesurez (a) ensuite l'angle BCG formé par les rayons visuels tirés du point C aux points B & G. Faites aussi planter un piquet au point E , & mesurez la distance de ce point au point F. Enfin, mesurez (b) l'angle BGC formé par les rayons visuels tirés du point G aux points B & C.

- Par ce moyen , 1^{er} dans le triangle CBG formé par les rayons visuels CB , CG & GB , vous connoîtrez le côté CG ou EF , avec les angles BCG , & BGC ; ainsi vous trouverez le côté CB (c). 2^{er} Dans le triangle CBD formé par le rayon visuel CB , par la ligne horizontale CD , & par la partie BD de la hauteur demandée AB , vous connoîtrez le côté CB , l'angle BCD , & l'angle DDC qui est droit ; ainsi vous trouverez (d) cette partie BD , à laquelle ajoutant la hauteur EC ou DA du pied de l'instrument , la somme sera cette hauteur demandée.

Autre solution, qui suppose que l'on peut voir
 Fig. 43. le pied A * de l'objet proposé, mais qui n'exige aussi qu'un seul point E de niveau avec ce pied.

160. APRES avoir mesuré l'angle BCD de la même manière dont on a dit dans la précédente solution (e) qu'il falloit le faire , choisissez dans la campagne un point F à volonté , mais qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point E ; & faites-y plan-

er un piquet FG. Mesurez ensuite (a) l'an- (a) N. 151
 gle DCG formé par la ligne horizontale CD,
 & par rayon visuel tiré du point C au point G.
 Faites aussi planter un piquet au point E; &
 mesurez la distance de ce point au point F.
 Enfin, mesurez (b) l'angle DGC formé par les (b) N. 151
 rayons visuels tirés du point G aux points D
 & C.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle CDG
 formé par les rayons visuels CG & GD, & par
 la ligne horizontale CD, vous connoîtrez le cô-
 té CG ou EF, avec les angles DCG, & DGC;
 ainsi vous trouverez le côté CD (c). 2^{ent} Dans (c) N. 119
 le triangle CBD formé par le rayon visuel CB,
 par la ligne horizontale CD, & par la partie BD
 de la hauteur demandée AB, vous connoîtrez
 le côté CD, l'angle BCD, & l'angle BDC qui
 est droit; ainsi vous trouverez (d) cette (d) N. 123
 partie BD, à laquelle ajoutant la hauteur EC
 ou DA du pied de l'instrument, la somme sera
 cette hauteur demandée.

VII. U S A G E.

161. *Mesurer la hauteur d'un objet dont le
 pied est inaccessible, & plus élevé que le lieu au-
 quel on est placé.*

Il faut mesurer la hauteur AB* de l'objet X, * Fig. 44
 qui est situé sur une Montagne Y.

Solution. Prenez dans la campagne un point E
 à volonté, & après y avoir disposé un Grapho-
 mètre de la même manière dont on a dit qu'il
 falloit le faire pour le cinquième usage (e), (e) N. 159

mesurez les angles BCD & ACD formés par la ligne horisontale CD, & par les rayons visuels tirés du point C, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre à son pied A. Laissez le Graphomètre dans cette position; & en regardant par les fentes des pinnules qui sont aux extrémités de sa règle fixe, faites planter dans l'alignement de la ligne horisontale CD un piquet FG, qui soit à une distance du point E, suffisante pour donner une base d'une grandeur raisonnable au triangle CBG. Transportez le Graphomètre au point F; & après l'y avoir disposé de la même manière qu'il l'étoit au point E, mesurez les angles BGD & AGD formés par la ligne horisontale GD, & par les rayons visuels tirés du point G, l'un au même point précédent B, & l'autre au même point précédent A. Enfin, mesurez la distance du point E au point F.

Par ce moyen, ^{1^{ent}} dans le triangle CBG formé par les rayons visuels CB & GB, & par la ligne horisontale CG, vous connoîtrez le côté CG ou EF, l'angle BCD, & l'angle BGC qui est le supplément de l'angle BGD; ainsi vous trouverez le côté BG (a).
^{2^{ent}} Dans le triangle GBD formé par le rayon visuel GB, par la ligne horisontale GD, & par la partie BD de la hauteur de l'objet proposé X & de la Montagne Y, vous connoîtrez le côté BG, l'angle BGD, & l'angle BDG qui est droit; ainsi vous trouverez cette partie BD (b).

3^{ent} Dans le triangle CAG formé par les rayons visuels CA & GA, & par la ligne horisontale CG, vous connoîtrez le côté CG ou EF, l'angle ACD, & l'angle AGC qui est le supplément de l'angle AGD ; ainsi vous trouverez le côté AG (a). 4^{ent} Enfin, dans le triangle GAD (a) N. 119. formé par le rayon visuel GA, par la ligne horisontale GD, & par la partie AD de la hauteur de la Montagne Y, vous connoîtrez le côté AG, l'angle AGD, & l'angle ADG qui est droit ; ainsi vous trouverez (b) cette partie AD, dont la différence à la partie BD sera la hauteur demandée AB.

Autre solution, qui n'exige pas que les points auxquels on place l'instrument, soient de niveau.

162. APRE'S avoir pris dans la campagne un point F* à volonté, & y avoir disposé le Graphomètre de la manière dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cinquième usage (c), (c) N. 157. mesurez les angles BGE & DGE formés par la ligne horisontale GE, & par les rayons visuels tirés du point G, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre au sommet D d'un autre objet de niveau avec le pied A du même objet X. Choisissez ensuite dans la campagne un autre point H à volonté, & qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point F; & après y avoir fait planter un piquet HI, mesurez (d) les angles BGI & DGI formés par les (d) N. 151. rayons visuels tirés du point G aux points B, D & I. Faites aussi planter un piquet au point F;

X

& mesurez la distance de ce point au point H.

- (a) N. 151. Enfin, mesurez (a) les angles BIG & DIG formés par les rayons visuels tirés du point I aux points B, D & G.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle GBI formé par les rayons visuels GB, GI & IB, vous connoîtrez le côté GI ou FH, avec les angles BGI & BIG; ainsi vous trouverez le

- (b) N. 119. côté BG (b). 2^{ent} Dans le triangle GDI formé par les rayons visuels GD, GI & ID, vous connoîtrez le côté GI ou FH, avec les angles DGI

- (c) N. 119. & DIG; ainsi vous trouverez le côté DG (c).

3^{ent} Dans le triangle GBE formé par le rayon visuel GB, par la ligne horisontale GE, & par la hauteur BE, vous connoîtrez le côté BG, l'angle BGE, & l'angle BEG qui est droit; ainsi

- (d) N. 119. vous trouverez cette hauteur (d). 4^{ent} Enfin, dans le triangle GDC formé par le rayon visuel GD, par la ligne horisontale GC, & par la hauteur DC, vous connoîtrez le côté DG, l'angle DGE, & l'angle DCG qui est droit; ainsi vous trou-

- (e) N. 119. verrez (e) cette hauteur DC, dont la différence à la hauteur BE sera la hauteur demandée AB.

Autre solution, qui suppose que l'on peut voir

- * Fig. 46. le pied A * de l'objet proposé; mais qui n'exige pas non plus, que les points auxquels on place l'instrument soient de niveau.

163. PRENEZ dans la campagne un point C

à volonté; & après y avoir disposé un Grapho-

- (f) N. 157. mètre (f) de manière que son plan soit verti-

- (g) N. 151. cal, mesurez (g) l'angle BDA formé par les

Prenez deux rayons visuels tirés du point D, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre à son pied A. Choisissez ensuite dans la campagne un autre point E à volonté, mais qui soit cependant tel que l'on puisse y aller directement du point C; & après y avoir fait planter un piquet EF, mesurez (a) les angles BDF (a) N. 151, & ADF formés par les rayons visuels tirés du point D aux points B, A & F. Faites aussi planter un piquet au point C; & mesurez la distance de ce point au point E. Enfin, mesurez (b) les angles BFD & AFD formés par les rayons visuels tirés du point F aux points B, A & D. Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle DBF formé par les rayons visuels DB, DF & FB, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles BDF & BFD; ainsi vous trouverez le côté BD (c). 2^{ent} Dans le triangle DAF formé par les rayons visuels DA, DF & FA, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles ADF & AFD; ainsi vous trouverez le côté AD (d). 3^{ent} Enfin, dans le triangle DBA (d) N. 159. formé par les rayons visuels DB & DA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez les côtés BD & AD, avec l'angle BDA; ainsi vous trouverez cette hauteur (e). (e) N. 140.

VIII. USAGE.

164. *Mesurer la hauteur d'un objet dont le pied est inaccessible, & moins élevé que le lieu auquel on est placé.*

Il faut de dessus la Montagne Y*, mesurer la hauteur AB de l'objet X. • Fig. 47. X ij

Solution. Prenez sur cette Montagne un point C à volonté; & après y avoir disposé un Graphomètre, de la même manière dont on a (a) N. 157. dit qu'il falloit le faire pour le V^e usage (a), mesurez les angles ADF & BDF formés par la ligne horisontale DF, & par les rayons visuels tirés du point D, l'un au pied A de l'objet proposé X, & l'autre à son sommet B. Faites ensuite planter un piquet EF dans l'alignement de la ligne horisontale DF, de la même manière dont on a dit dans les usages précédents qu'il falloit le faire; & mesurez la distance du point C au point E. Enfin, transportez le Graphomètre au point E; & après l'y avoir disposé de la même manière qu'il l'étoit au point C, mesurez l'angle BFD formé par la même ligne horisontale précédente DF, & par le rayon visuel tiré du point F au point B.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle DBF formé par les rayons visuels DB & FB, & par la ligne horisontale DF, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles BDF & BFD; ainsi (b) N. 119. vous trouverez le côté DB (b). 2^{ent} Dans le triangle DBG formé par le rayon visuel DB, par la ligne verticale DG, & par la ligne horisontale GB, vous connoîtrez le côté DB, l'angle DGB qui est droit, & l'angle BDG qui est le complément de l'angle BDF; ainsi vous (c) N. 119. trouverez (c) cette ligne verticale DG, & cette ligne horisontale GB. 3^{ent} Enfin, dans le triangle DAH formé par le rayon visuel DA,

par la ligne verticale DH, & par la ligne horizontale HA, vous connoîtrez le côté HA qui est égal à la ligne horizontale GB, l'angle DHA qui est droit, & l'angle ADH qui est le complément de l'angle ADF; ainsi vous trouverez (a) (s) N. 123. cette verticale DH, dont l'excès GH sur la verticale DG est égal à la hauteur demandée AB.

Autre solution, qui n'exige pas que les points auxquels on place l'instrument, soient de niveau.

165. PRENEZ sur la hauteur Y* un point E à * Fig. 48. volonté; & après y avoir disposé un Graphomètre (b) de manière que son plan soit vertical, (b) N. 157. mesurez (c) l'angle BCA formé par les rayons (c) N. 151. visuels tirés du point C, l'un au sommet B de l'objet proposé X, & l'autre à son pied A. Choisissez ensuite une base EF à volonté; & mesurez (d) les distances du point C aux points B (d) N. 152. & A, lesquelles distances sont accessibles par leur extrémité C.

Par ce moyen, dans le triangle BCA formé par les rayons visuels CB & CA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez les côtés CB & CA, avec l'angle BCA; ainsi vous trouverez (e) cette hauteur. (e) N. 140.

Autre solution, qui suppose que l'on ne peut point voir le pied de l'objet proposé.

166. PRENEZ sur la hauteur Y* un point C * Fig. 49. à volonté; & disposez-y un Graphomètre de la même manière que dans la première solution (f), afin de mesurer les angles GDF (f) N. 164. & BDF formés par la ligne horizontale DF,

& par les rayons visuels tirés du point D, l'un à un point quelconque G de niveau avec le pied A de la hauteur proposée AB, & l'autre au sommet B de la même hauteur. Faites ensuite planter un piquet EF dans l'alignement de la ligne horisontale DF, de la même manière dont on a dit dans les usages précédents qu'il falloit le faire; & mesurez la distance du point C au point E. Enfin, transportez le Graphomètre au point E; & après l'y avoir disposé de la même manière qu'il l'étoit au point C, mesurez les angles BFD & GFD formés par la même ligne horisontale précédente DF, & par les rayons visuels tirés du point F aux points précédents B & G.

- Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle DGF formé par les rayons visuels DG & FG, & par la ligne horisontale DF, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles GDF & GFD; (a) N. 119. ainsi vous trouverez le côté FG (a). 2^{ent} Dans le triangle DBF formé par les rayons visuels DB & FB, & par la ligne horisontale DF, vous connoîtrez le côté DF ou CE, avec les angles BDF & BFD; ainsi vous trouverez le côté FB (b). 3^{ent} Dans le triangle GFB formé par les rayons visuels FG & FB, & par la distance du point G au point B, vous connoîtrez les côtés FG & FB, avec l'angle GFB qui est la différence de l'angle GFD à l'angle BFD; ainsi vous trouverez (c) l'angle GBF, & cette distance GB. 4^{ent} Enfin, dans le triangle GBA.

formé par cette même distance GB, par la ligne horizontale GA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez le côté GB, l'angle GAB qui est droit, & l'angle GBA qui est la différence de la somme des angles connus GBF & FBH † à celle de deux angles droits; ainsi vous trouverez cette hauteur (a). (a) N. 119.

IX. USAGE.

167. *Mesurer la hauteur & la distance d'un objet inaccessible, qui ne peut être vu que de certains endroits.*

Il faut mesurer la hauteur AB * & la distance FA de l'objet X, qui ne peut être vu que des points C & D. * Fig. 50.

Solution. Posez un Graphomètre au point C; & mesurez, de la même manière dont on a dit dans les usages précédents qu'il falloit le faire, 1^{er} les angles BCA, BCD & ACD formés par les rayons visuels tirés du point C, l'un au sommet B de l'objet proposé X, l'autre à son pied A, & le dernier à l'autre point D duquel on peut voir le même objet X: 2^{ent}, l'angle ACF formé par la ligne verticale CF, & par le rayon visuel tiré du point C au point A. Transportez ensuite le Graphomètre au point D; & mesurez (b) les angles BDC & ADC formés par les rayons visuels tirés du point D, l'un au point précédent B, l'autre au point préce- (b) N. 152.

† L'angle FBH est le complément de l'angle BFH; & l'angle BFH est le supplément de l'angle BFD que l'on a mesuré.

dent A , & le dernier au point C auquel on a fait la première opération. Enfin , par le moyen d'une base prise à volonté , mesurez la distance

(a) N. 153. du point C au point D (a), & la hauteur ver-

(b) N. 157. ticale CF du point C (b).

ou 158.

Par ce moyen , 1^{ent} dans le triangle CBD formé par les rayons visuels CB, CD & DB, vous connoîtrez le côté CD, avec les angles BCD

(c) N. 119. & BDC; ainsi vous trouverez le côté BC (c).

2^{ent} Dans le triangle CAD formé par les rayons visuels CA, CD & DA, vous connoîtrez le côté CD, avec les angles ACD & ADC;

(d) N. 119. ainsi vous trouverez le côté AC (d). 3^{ent} Dans le triangle BCA formé par les rayons visuels CB & CA, & par la hauteur demandée AB, vous connoîtrez les côtés BC & AC, avec l'angle BCA; ainsi vous trouverez cette hau-

(e) N. 140. teur (e). 4^{ent} Enfin, dans le triangle FCA formé par le rayon visuel CA, par la hauteur verticale CF, & par la distance demandée FA, vous connoîtrez les côtés CF & AC, avec l'angle ACF; ainsi vous trouverez cette distan-

(f) N. 140. ce (f).

X. USAGE.

168. *Mesurer la grandeur d'un objet accessible, qui est incliné à l'horison.*

* Fig. 51. Il faut mesurer la grandeur AB * de l'objet accessible X, qui est incliné à l'horison.

Solution. Prenez dans la campagne un point C à volonté, & mesurez la distance de ce point au pied A de l'objet proposé X. Posez ensuite

un

un Graphomètre à ce même point, & mesurez (a) les angles BDA & ADC formés, l'un (a) N. 151. par les rayons visuels tirés du point D au sommet B & au pied A de ce même objet, & l'autre par le rayon visuel précédent DA, & par le pied DC de l'instrument. Enfin, par le moyen d'une base CE prise à volonté, mesurez (b) la distance du point D au point B, laquelle est accessible par son extrémité D. (b) N. 152.

Par ce moyen, 1^{er} dans le triangle CDA † formé par la distance CA, par le rayon visuel DA & par la hauteur DC du pied de l'instrument, vous connoîtrez les côtés DC & CA, avec l'angle ADC; ainsi vous trouverez le côté AD (c). (c) N. 128. 2^{er} Dans le triangle DBA formé par les rayons visuels DB & DA, & par la grandeur AB de l'objet proposé, vous connoîtrez les côtés BD & AD, avec l'angle BDA; ainsi vous trouverez (d) cette grandeur demandée. (d) N. 140.

X I. U S A G E.

169. *Mesurer la grandeur d'un objet inaccessible, qui est incliné à l'horison.*

Il faut mesurer la grandeur de l'objet inaccessible AB*, qui est incliné à l'horison. * Fig. 52.

Solution. Prenez dans la campagne un point C à volonté; & après y avoir posé un Graphomètre, mesurez (e) l'angle BDA formé (e) N. 151. par les rayons visuels tirés du point D, l'un au

† Lorsque la distance du point C au point A est un peu considérable, on peut prendre le triangle CDA pour un triangle isocèle.

sommet B de l'objet proposé, & l'autre à son pied A. Mesurez ensuite (a) par le moyen d'une base CE prise à volonté, les distances du point D aux points B & A, lesquelles sont accessibles par leur extrémité D.

Par ce moyen, dans le triangle DBA formé par les rayons visuels DB & DA, & par la grandeur AB de l'objet proposé, vous connoîtrez les côtés BD & AD, avec l'angle BDA; ainsi (b) N. 140. vous trouverez (b) cette grandeur demandée.

XII. USAGE.

170. *Mesurer de combien un lieu est plus élevé que celui auquel on est situé.*

* Fig. 53. On est placé au point C*, & l'on veut sçavoir de combien ce point est moins élevé que le point B.

Solution. Posez un Graphomètre au point C; & après l'avoir disposé de la même manière dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cinquième usage (c), mesurez l'angle BDG formé par la ligne horizontale DG, & par le rayon visuel tiré du point D au point proposé B. Mesurez ensuite (d) par le moyen d'une base CE prise à volonté, la distance du point D au même point B, laquelle est accessible par son extrémité D.

Par ce moyen, dans le triangle DBG formé par la ligne horizontale DG, par le rayon visuel DB, & par la partie BG de la hauteur demandée, vous connoîtrez le côté BD, l'angle BDG, & l'angle BGD qui est droit; ainsi

vous trouverez (a) cette partie BG, à laquelle (a) N. 119.
ajoutant la hauteur CD ou GA du pied de
l'instrument, la somme AB sera la quantité dont
le point B est plus élevé que le point C.

XIII. USAGE.

171. *Mesurer de combien un lieu est moins
élevé que celui auquel on est situé.*

On est placé au point C*, & l'on veut sça- * Fig. 54.
voir de combien ce point est plus élevé que le
point A.

Solution. Posez un Graphomètre au point C;
& après l'avoir disposé de la même manière
dont on a dit qu'il falloit le faire pour le cin-
quième usage (b), mesurez l'angle BDA formé (b) N. 157.
par la ligne horifontale DB, & par le rayon
visuel tiré du point D au point proposé A. Me-
surez ensuite (c) par le moyen d'une base CE (c) N. 152.
prise à volonté, la distance du point D au
même point A, laquelle est accessible par son
extrémité D.

Par ce moyen, dans le triangle DBA formé
par la ligne horifontale DB, par le rayon visuel
DA, & par la hauteur AB, vous connoî-
trez le côté AD, l'angle BDA, & l'angle B
qui est droit; ainsi vous trouverez (d) cette (d) N. 119.
hauteur AB, dont l'excès AG sur la hauteur CD
ou BG du pied de l'instrument, sera la quantité
dont le point A est moins élevé que le point C.

XIV. USAGE.

172. *Mesurer de combien un lieu quelconque
est plus ou moins élevé qu'un autre.*

• Fig. 55.

Il faut mesurer de combien le point A * est plus ou moins élevé que le point B.

(*) N. 170.
ou 171.

Solution. Prenez dans la campagne un point C à volonté , & qui soit cependant tel que l'on puisse voir de ce point les deux endroits proposés A & B ; & après y avoir posé un Graphomètre , mesurez (a) de combien le point A est plus ou moins élevé que le point C ; & de combien le point B est aussi plus ou moins élevé que le même point C. Comparez ensuite ces deux élévations à celle du point C , & vous connoîtrez de combien le point A est plus ou moins élevé que le point B.

Ainsi , dans cet exemple où le point A est plus élevé que le point C de la quantité AD , & où le point B est au contraire moins élevé que le même point C de la quantité EB ; le point A est plus élevé que le point B , de la somme de ces deux quantités AD & EB.

Si au contraire le point A étant plus élevé que le point C de cette même quantité AD , le point B étoit aussi plus élevé que ce même point C de la quantité EB ; le point A seroit plus élevé que le point B , de la différence de ces deux quantités AD & EB. Et il en est de même des autres cas qui peuvent se rencontrer.

SCHOLIE I.

173. Si par rapport à l'éloignement , ou à quelque autre obstacle , on ne pouvoit pas voir d'un même endroit les deux points proposés , on

prendroit des points interposés entre ces deux points, de la même manière que s'il étoit question de mesurer leur distance (a). Et en cherchant en- (a) N. 154.
suite (b) de combien le premier seroit plus ou (b) N. 172.
moins élevé que le second, de combien le second seroit plus ou moins élevé que le troisième, & ainsi de suite, on parviendroit enfin à connoître de combien le premier seroit plus ou moins élevé que le dernier.

S C H O L I E II.

174. Nous n'avons point eu d'égard dans les Nos 70 & 71, ni par conséquent dans le 72^{ème}, à l'excès BD * du niveau apparent sur le * Fig. 36.
vrai niveau. Cependant, comme on ne doit point négliger cet excès, lorsque la distance des points dont il s'agit est un peu considérable, il faut le connoître, afin de l'ajouter à la différence de hauteur que l'on aura trouvée entre ces deux points, lorsque celui auquel on aura posé l'instrument sera le moins élevé *, & de le retrancher au con- * Fig. 53.
traire de cette même différence, lorsque ce même point sera le plus élevé *. Or pour cet effet, on * Fig. 54.
cherchera (c) la valeur du côté CD du trian- (c) N. 140.
gle CAD, dans lequel on connoît l'angle A, avec les côtés AC & AD, puisque cet angle A est droit (d), que le côté AC qui est le demi-diamètre (d) E. 1. 3.
de la Terre est de 3276344 toises, & que le P. 18.
côté AD est la distance horisontale du point auquel on est situé, au point dont on cherche l'élévation; & l'on retranchera ensuite de cette valeur, le même demi-diamètre AC ou BC.

175. *Mesurer de combien un objet inaccessible quelconque est incliné à l'horison.*

Il faut mesurer de combien l'objet inaccessible

* Fig. 57. sible AB * est incliné à l'horison.

(a) N. 169. *Solution.* Mesurez (a) la grandeur AB de l'objet proposé. Mesurez aussi (b) de combien le sommet B de ce même objet, est plus élevé que son pied A †.

Par ce moyen, dans le triangle ABC formé par l'objet proposé AB, par la ligne horizontale AC, & par la ligne verticale BC, vous connoîtrez les côtés AB & BC, avec l'angle BCA qui est droit; ainsi vous trouverez (c) l'inclinaison BAC demandée.

(c) N. 127.

XVI. USAGE.

176. *Mesurer la surface d'un triangle-rectiligne quelconque.*

* Fig. 58. Il faut mesurer la surface du triangle ABC *.

Solution. Posez un Graphomètre à l'un quelconque des angles du triangle proposé, par exemple à l'angle A; & faites planter un piquet à chacun des autres angles B & C. Mesurez ensuite (d) l'angle EFD formé par les rayons visuels tirés du point F aux points E & D. Enfin, mesurez les côtés AB & AC.

(d) N. 151.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle ABG, vous connoîtrez le côté AB, l'angle BAG ou EFD, & l'angle BGA qui est droit; ainsi

† On ne doit point avoir ici d'égard à la différence du niveau vrai au niveau apparent.

vous trouverez (a) la perpendiculaire BG. (a) N. 119.

2^{ent} Dans le triangle proposé ABC, vous connoîtrez la base AC, avec la perpendiculaire BG; ainsi vous trouverez (b) la surface demandée. (b) E. 1. 1. P. 41.

XVII. USAGE.

177. *Mesurer la surface d'un Polygone rectiligne quelconque.*

Il faut mesurer la surface du Polygone ABCDEF *.

* Fig. 59.

Solution. Posez un Graphomètre à l'un quelconque des angles du Polygone proposé, par exemple à l'angle A; & faites planter un piquet à chacun des autres angles B, C, D, E & F. Mesurez ensuite (c) les angles LOK, KOI, IOH & HOG formés par les rayons visuels tirés du point O aux points L, K, I, H & G. Enfin, mesurez les distances du point A aux points F, E, D, C & B. (c) N. 151.

Par ce moyen, 1^{ent} dans le triangle AFM vous connoîtrez le côté AF, l'angle FAM ou LOK, & l'angle FMA qui est droit: ainsi vous trouverez la perpendiculaire FM (d); & par conséquent (e), la surface du triangle AFE. (d) N. 119. (e) E. 1. 1. P. 41.

2^{ent} Dans le triangle AEN vous connoîtrez le côté AE, l'angle EAN ou KOI, & l'angle ENA qui est droit: ainsi vous trouverez (f) la perpendiculaire EN; & par conséquent (g), la surface du triangle AED. (f) N. 119. (g) E. 1. 1. P. 41.

3^{ent} Dans le triangle ADP vous connoîtrez le côté AD, l'angle DAP ou IOH, & l'angle DPA qui est droit: ainsi vous trouverez (h) la perpendiculaire DP; & (h) N. 119.

- (a) E. l. 1. par conséquent (a), la surface du triangle ADC.
 P 41. 4^{ent} Dans le triangle ACQ vous connoîtrez le côté AC, l'angle CAQ ou HOG, & l'angle CQA qui est droit : ainsi vous trouverez (b) la perpendiculaire CQ ; & par conséquent (c), la surface du triangle ACB. 5^{ent} Enfin, vous ajouterez ensemble les surfaces de ces triangles AFE, AED, ADC & ACB que vous venez de mesurer, & la somme sera la surface demandée.

S C H O L I E.

178. Le moyen le plus facile, & en même temps le plus exact, de mesurer les distances du point A * aux points F, E, D, &c. est de les considérer comme n'étant accessibles que par leur extrémité A ; & de les mesurer par conséquent de la manière dont nous avons dit (d) qu'il faut mesurer ces sortes de distances. Mais, comme les différents angles que ces mêmes distances forment avec les côtés AF & AB de l'angle auquel on a placé le Graphomètre, sont déjà mesurés (e), on prendra pour base l'un de ces côtés, prolongé s'il est nécessaire, par exemple le côté AB, & l'on mesurera cette base. On mesurera aussi (f) les angles LGO, KGO, IGO & HGO formés par les rayons visuels tirés de l'extrémité G de cette même base aux points O, L, K, I & H. Or, par ce moyen, 1^{er} dans le triangle OLG formé par les rayons visuels OL, OG & GL, on connoîtra le côté OG ou AB, l'angle LGO, & l'angle LOG qui est la somme des angles LOK, KOI, IOH & HOG ; ainsi l'on trouvera (g) le côté

OL ou **AF**. 2^{me} Dans le triangle **OKG** formé par les rayons visuels **OK**, **OG** & **GK**, on connoîtra le côté **OG** ou **AB**, l'angle **KGO**, & l'angle **KOG** qui est la somme des angles **KOI**, **IOH** & **HOG**; ainsi, l'on trouvera (a) le côté **OK** ou **AE**. 3^{me} Dans le triangle **OIG** formé par les rayons visuels **OI**, **OG** & **GI**, on connoîtra le côté **OG** ou **AB**, l'angle **IGO**, & l'angle **IOG** qui est la somme des angles **IOH** & **HOG**; ainsi, l'on trouvera (b) le côté **OI** ou **AD**. 4^{me} Enfin, dans le triangle **HOG** formé par les rayons visuels **OH**, **OG** & **GH**, on connoîtra le côté **OG** ou **AB**, avec les angles **HGO** & **HOG**; ainsi, l'on trouvera (c) le côté **OH** ou **AC**. (a) N. 119; (b) N. 119; (c) N. 119.

XVIII. USAGE.

179. Calculer les différentes parties d'une Fortification dont on sçait la construction, & dont on connoît le côté extérieur.

On donne le côté extérieur **AF** * du front de Fortification **X**, construit suivant le système de M. de Vauban; & il faut en trouver les autres parties. * Fig. 60.

Premièrement,

180. Pour trouver celles des Bastions, & des ouvrages à Corne & à Couronne.

Constr. Tirez du sommet de l'angle flanqué **A** * au sommet de l'angle flanqué **F**, & du sommet de l'angle de l'épaule **B** au sommet de l'angle de l'épaule **E**, les lignes droites **AF** & **BE**. Prolongez les faces **AB** & **FE** des Bastions, jusqu'à * Fig. 61.

Z

ce qu'elles rencontrent en des points D & C, la Courtine CD. Enfin, abaissez des points B & H, les perpendiculaires BK & HG au côté

(a) E. 1. 1. extérieur AF (a).

P. 12.

Solution. 1^{ent} Dans le triangle AHG, le côté GH qui est la perpendiculaire, est connu par la construction de l'ouvrage. On connoît aussi le côté AG qui est la moitié du côté extérieur AF, avec l'angle AGH qui est droit [c].

(b) N. 139. Ainsi, l'on trouvera (b) l'angle diminué GAH.

2^{ent} Dans le triangle ABK, le côté AB qui est la face du Bastion, est connu par la construction de l'ouvrage. On connoît aussi l'angle GAH, avec l'angle AKB qui est droit [c]. Ainsi, l'on

(c) N. 119. trouvera (c) le côté AK.

3^{ent} Dans le triangle EBD, on connoît l'angle EBD qui est l'angle extérieur des paral-

(d) E. 1. 1. leles. AF & BE, & par conséquent égal (d) à

P. 29.

(e) E. 1. 1. l'angle intérieur GAH (e). On connoît aussi

P. 32.

l'angle BDE, ou l'angle BED; puisque suivant la construction de l'ouvrage, le triangle EBD est isoscele. Enfin, on connoît le côté BE; puis-

(f) E. 1. 1. que la moitié BI est égale (f) à la différence KG

P. 34.

de la ligne AK à la ligne AG. Ainsi, l'on trou-

(g) N. 119. vera (g) le flanc ED.

4^{ent} Dans le triangle CDE, on connoît le côté ED. On connoît aussi l'angle DCE; puis-

que l'angle GAH est égal à l'angle GFH, & que les lignes CD & AF étant paralleles, les

(h) E. 1. 1. angles alternes GFH & DCE sont égaux (h).

P. 29.

Enfin, on connoît l'angle flancuant CDE, qui

est la somme des angles BDE & BDC ou DCE. Ainsi l'on trouvera (a) la Courtine CD. (a) N. 119.

5^{me} Le demi-angle flanqué BAL, avec l'angle de l'épaule FED sont aussi connus. Puisque le premier est la différence de l'angle diminué GAH au demi-angle du Polygone FAL; & que le dernier est le supplément de l'angle DEC du triangle CDE.

6^{me} Enfin, dans le triangle ADL, on connoît le côté AD qui est la somme de la face AB du Bastion, & du côté BD du triangle isoscele EBD. On connoît aussi l'angle BDC, avec l'angle BAL. Ainsi, l'on trouvera (b) la capitale AL; & la demi-gorge CL, qui est la différence de la Courtine CD au côté LD. (b) N. 119.

Secondement,

181. Pour trouver celles de la Demi-Lune.

Constr. Prolongez les faces NA*, AB & PO, jusqu'à ce qu'elles rencontrent, l'une la Contrescarpe KG en un point K, l'autre la Courtine CD en un point D; & la dernière, la face AB en un point M. Prolongez aussi la Contrescarpe KG, jusqu'à l'angle de l'épaule E. Tirez de l'angle P de la Demi-lune à la Courtine, la perpendiculaire PI (c); & à l'angle flaquant D, la ligne droite PD. Enfin, tirez du point K au point M, la ligne droite KM; & du point M à l'angle de l'épaule E, la ligne droite ME. (c) E. 1. 2. P. 12.

Solution. 1^{re} Dans le triangle PID, on connoît l'angle PID qui est droit [c]; le
Z ij.

- (a) N. 180. côté ID (a) qui est la moitié de la Courtine; & le côté PD qui par la construction de l'ouvrage, est égal à la ligne LD, laquelle par la même construction, surpasse de 5 toises la partie BD de la ligne de défense AD. Ainsi, l'on trouvera (b) l'angle PDI, & la perpendiculaire PI.

2^{ent} Dans le triangle MDP, on connoît le côté PD; le côté MD qui par la construction de l'ouvrage, surpasse de 3 toises la partie BD de la ligne de défense AD; & l'angle MDP qui est la différence de l'angle BDC à l'angle PDI.

- (c) N. 140. Ainsi, l'on trouvera (c) le côté MP, & l'angle DMP.

3^{ent} Dans le triangle EMD, on connoît le côté MD; le côté ED (d); & l'angle MDE (e). Ainsi, l'on trouvera (f) le côté ME, & l'angle DME.

4^{ent} Dans le triangle AMK, on connoît le côté AM qui par la construction de l'ouvrage est plus petit de 3 toises, que la face AB; le côté AK qui par la même construction, est la largeur du fossé; & l'angle KAM qui est le supplément de l'angle flanqué. Ainsi, l'on trouve (g) le côté KM, & l'angle AMK.

5^{ent} Dans le triangle KEM, on connoît le côté KM, avec le côté ME, & l'angle KME qui est la différence de la somme des angles AMK & DME à celle de deux angles droits. Ainsi, l'on trouvera (h) l'angle MEK.

6^{ent} Dans le triangle OME, on connoît le

DE TRIGONOMETRIE. 181

côté ME; l'angle MEK; & l'angle OME qui est la différence de l'angle DME à l'angle DMP. Ainsi, l'on trouvera (a) le côté MO; & par (a) N. 119. conséquent, la face OP qui est la différence de ce côté au côté MP.

7^{me} Enfin, dans le triangle POG, on connoît le côté OP; l'angle POG qui est égal (b) à (b) E. 1. 1. la somme des angles intérieurs MEO & OME P. 32. du triangle OME; & le demi-angle flanqué MPH qui (c) est le supplément des an- (c) E. 1. 1. gles DMP & MHP †. Ainsi, l'on trouvera (d) (d) P. 32. N. 119. la demi-gorge OG, & la capitale PG.

S C H O L I E.

182. *Ce que nous avons dit dans ce dernier Chapitre, suffit pour faire voir la manière dont il faut résoudre tous les Problèmes qui dépendent de la Trigonométrie-rectiligne. Ainsi, nous finissons ce qui concerne cette Trigonométrie, en avertissant qu'un Géomètre ne doit point s'en tenir aux seules méthodes qu'il a lues dans les livres, pour les appliquer indifféremment à tous les cas dans lesquels il peut se trouver : mais qu'il doit réfléchir mûrement à ce qu'il a à faire; & chercher ensuite dans ce qu'il sçait de Géométrie, les moyens les plus sûrs & les plus faciles de l'exécuter.*

† L'angle MHP est connu, puisqu'il est égal (c) à l'an- (c) E. 1. 1. gle IHD du triangle-rectangle DIH, dont on connoît l'angle BDC. p. 15.

Fin du second Livre.



LIVRE TROISIEME.

De la Trigonométrie-Sphérique.

ON doit remarquer dans la Trigonométrie deux sortes de Principes; sçavoir, des *Principes généraux*, & des *Principes particuliers*. Nous n'avons point parlé des Principes généraux de la Trigonométrie-rectiligne, parce que ces Principes qui consistent dans les propriétés des angles & des triangles qui sont formés par des lignes droites, se trouvent démontrés dans les *Elémens d'Euclide*, dont nous supposons que les personnes qui étudient ce *Traité* sont instruites. Mais comme ces *Elémens* ne considèrent ni les angles, ni les triangles, dont les côtés sont des arcs de cercles, & qui sont cependant ceux dont il s'agit dans la Trigonométrie-Sphérique, nous commencerons par démontrer les propriétés de ces figures; & nous traiterons ensuite des Principes particuliers, des Problèmes & des Usages de cette dernière Trigonométrie, dans le même ordre que nous avons suivi dans le Livre précédent.

SECTION PREMIERE.

Des Principes généraux de la Trigonométrie-Sphérique.

CHAPITRE PREMIER.

Des Cercles de la Sphère.

PROPOSITION I. Théorème.

183. **L** A section d'une Sphère qui est coupée par un plan , est un cercle.

La section ADBE * d'une Sphère X qui est coupée par un plan , est un cercle. * Fig. 63. & 64.

Premièrement.

Lorsque le plan coupant passe par le centre de la Sphère.

Constr. Du centre C * de la Sphère X , tirez aux points D , B , E , &c. pris à volonté dans la commune section ADBE de la surface de cette Sphère & du plan qui la coupe , les lignes droites CD , CB , CE , &c. • Fig. 63.

Démonstr. Les lignes CD & CB sont égales (a) , puisque [c] elles sont tirées du centre C d'une Sphère à des points D & B pris dans sa surface. Or, il en est de même de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point C , à la commune section ADBE de la surface de la Sphère X & du plan qui la coupe. Donc , (a) R. L. 22. d. 23.

puisque [H] la figure ADBE que cette commune section termine est un plan, cette figure

(a) E. 1. 1. est un cercle (a).
d. 15.

Secondement.

Lorsque le plan coupant ne passe point par le centre de la Sphère.

* Fig. 64. *Constr.* Du centre C * de la Sphère X, abaissez au plan coupant, la perpendiculaire CF (b). Ensuite, des points D & B pris à volonté dans la commune section ADBE de la surface de cette Sphère & de ce plan, tirez au point F auquel cette perpendiculaire rencontre ce même plan, & au centre C de cette même Sphère, les lignes droites DF & DC, BF & BC.

Démonstr. Les triangles CFD & CFB sont rectangles l'un & l'autre en F ; puisque la ligne CF qui est perpendiculaire [c] au plan qui coupe la Sphère X, l'est aussi (c) à chacune des lignes FD & FB de ce même plan, avec lesquelles elle a le point F de commun : le côté CF leur est commun : & l'hypoténuse CD du premier est égale (d) à l'hypoténuse CB du second ; puisque [c] ces hypoténuses sont des lignes droites tirées du centre C d'une Sphère à des points D & B pris dans sa surface. Ainsi, le côté FD est égal (e) au côté FB. Or, on démontre la même chose, & de la même manière, de toutes les lignes droites que l'on peut tirer du point F à la commune section ADBE de la surface de la Sphère X & du plan qui coupe cette surface.

Donc,

Donc , toutes les lignes droites que l'on peut mener du point F à cette commune section, sont égales ; & par conséquent , puisque [H] la figure ADBE que cette commune section termine est un plan, cette figure est un cercle (a). (a) E. L. 14 d. 15.
Donc , C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

184. IL suit de la démonstration de la première partie de ce théorème , que si un cercle ADBE * est la section d'une sphère coupée par un plan qui passe par le centre de cette Sphère, le centre C de ce cercle est le même que celui de cette Sphère : & de la démonstration de la seconde partie , que si un cercle ADBE * est la section d'une Sphère coupée par un plan qui ne passe point par le centre de cette Sphère, le centre F de ce cercle est le point auquel la perpendiculaire abaissée du centre C de cette même Sphère à ce plan, rencontre ce même plan. * Fig. 63. * Fig. 64.

Définition.

185. DANS une Sphère, on appelle *grands cercles*, ceux qui passent par le centre ; & *petits cercles* , ceux qui n'y passent point.

Nous ne considérons que les *grands cercles*.

PROPOSITION II. Théorème.

186. Dans une Sphère, les *grands cercles* se divisent réciproquement en deux parties égales.

Dans la Sphère X *, les grands cercles AFBG & ADBE se divisent réciproquement en deux parties égales. * Fig. 65.

Démonstr. Puisque [H] les cercles AFBG & ADBE sont des grands cercles, ils passent chacun par le centre C de la Sphère (a); & par conséquent, leur commune section AB y passe aussi. Or, (b) ce centre est aussi celui de chacun de ces cercles; & (c) cette commune section est une ligne droite. Donc, cette même commune section est un diamètre de chacun de ces mêmes cercles (d). Ainsi, elle les divise l'un & l'autre en deux parties égales; & par conséquent, C. Q. F. D.

(a) N. 185.

(b) N. 184.

(c) E. l. 11.

P. 3.

(d) E. l. 1.

d. 17.

Définition.

187. ON appelle *Pôles* d'un cercle, deux points de la surface de la Sphère dont ce cercle est une section, qui sont chacun également éloignés de tous les points de la circonférence de ce même cercle.

* Fig. 65. Les points G * & F de la surface de la Sphère X, qui sont chacun également éloignés des points A, D, B, &c. de la circonférence du cercle ADBE, sont les Pôles de ce cercle.

COROLLAIRE I.

188. IL suit de cette définition, que si dans une Sphère, un arc d'un grand cercle est compris entre l'un des Pôles d'un autre grand cercle & sa circonférence, il sera le quart de la circonférence d'un cercle.

* Fig. 66. Dans la Sphère X*, l'arc GD qui est compris entre le Pôle G du cercle ADBE & sa circonférence, est le quart de la circonférence d'un cercle.

Constr. Supposez que l'arc GD est prolongé, jusqu'à ce qu'il ait formé le cercle DGEF.

Démonstr. L'arc DGE est la moitié de la circonférence d'un cercle, puisque les cercles ADBE & DGEF, qui [H] sont deux grands cercles, se divisent réciproquement en deux parties égales (a). Or, l'arc GD est égal à l'arc GE, (a) N. 186. puisque le point G étant [H] l'un des Pôles du cercle ADBE, il est également éloigné de tous les points de la circonférence de ce cercle (b). (b) N. 187. Donc, l'arc GD est la moitié de l'arc DGE, par conséquent, le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

189. IL suit de ce Corollaire, que si dans une Sphère, la circonférence d'un cercle passe par les Pôles d'un autre cercle, ce premier cercle sera perpendiculaire à cet autre.

Dans la Sphère X *, le cercle AGBF dont la circonférence passe par les Pôles G & F du cercle ADBE, est perpendiculaire à ce dernier cercle. * Fig. 66.

Constr. Supposez qu'un grand cercle DGEF passe aussi par les Pôles G & F du cercle ADBE. Ensuite, du centre C de la Sphère, tirez au Pôle G, & aux points B & D auxquels les circonférences AGBF & DGEF rencontrent celle du cercle ADBE, les lignes droites CG, CB & CD.

Démonstr. Les arcs GB & GD sont les mesures, l'un de l'angle GCB, & l'autre de l'angle

gle GCD; puisque le centre C de la Sphère X, qui [c] est le sommet de ces angles, est aussi (a) (a) N. 184. le centre de ces arcs. Or (b), ces mêmes arcs sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle; puisqu'ils sont compris chacun entre le Pôle G du cercle ADBE & sa circonférence. Donc, chacun des angles GCB & GCD est un angle droit; & par conséquent la ligne CG est perpendiculaire à chacune des lignes CB & CD. Mais, puisque la ligne CG est perpendiculaire à chacune des lignes CB & CD avec lesquelles elle a le point C de commun, elle (c) E. 1. 11. l'est au plan de ces lignes (c); c'est-à-dire, au P. 4. cercle ADBE. Donc, le cercle AGBF dans lequel elle est tirée, est aussi perpendiculaire au (d) E. 1. 11. même cercle ADBE (d); & par conséquent; P. 18. C. Q. F. D.

PROPOSITION III. Théorème.

190. Si dans une Sphère, un grand cercle est perpendiculaire à un autre, sa circonférence passera par les Pôles de cet autre.

* Fig. 67. Dans la Sphère X*, la circonférence du cercle AGBF qui est perpendiculaire au cercle ADBE, passe par les Pôles de ce dernier cercle.

Constr. Supposez qu'un grand cercle DGER est aussi perpendiculaire au cercle ADBE. Ensuite, du point G auquel la circonférence de ce premier cercle rencontre celle du cercle AGBF, tirez aux points A & D, les lignes droites GA & GD.

Démonstr. Puisque [H] les cercles AGBF & DGEF sont des grands cercles de la Sphère X, leur commune section GF passe par le centre de cette Sphère (a); & par une raison pareille, (a) N. 185. la commune section AB des cercles AGBF & ADBE, y passe aussi. Ainsi, le point C auquel ces communes sections se rencontrent, est le centre de cette Sphère; & par conséquent (b), celui du cercle ADBE. Mais, puis- (b) N. 184. que le point C est le centre du cercle ADBE, les triangles GCA & GCD, qui (c) sont rectangles (c) E. I. 11. l'un & l'autre en C, (car (d) les cercles AGBF (d) E. I. 11. & DGEF étant perpendiculaires l'un [H] & p. 12. l'autre [c] au même cercle ADBE, leur commune section GC lui est aussi perpendiculaire,) & qui ont le côté GC commun, ont encore le côté CA égal au côté CD. Ainsi, l'hypoténuse GA du premier est égale à l'hypoténuse GD du second (e); & par conséquent, le point G est (e) E. I. 1. également éloigné des points A & D de la cir- P. 6. conférence du cercle ADBE. Or, la même démonstration subsiste, par quelque point de la circonférence de ce dernier cercle que passe celle du cercle DGEF. Donc, le point G de la circonférence du cercle AGBF est également éloigné de tous les points de celle du cercle ADBE; & par conséquent, puisque ce même point est un point de la surface de la Sphère X; il est (f) un des Pôles de ce dernier cercle. (f) N. 187. Donc, C. Q. F. D.

191. IL suit de ce théorème, que *si dans une Sphère, deux grands cercles sont perpendiculaires chacun à un même cercle, les points auxquels les circonférences de ces deux cercles se coupent, seront les Pôles de ce dernier cercle.*

* Fig. 67. Dans la Sphère X *, les points G & F auxquels se coupent les circonférences des cercles AGBF & DGEF, qui sont chacun perpendiculaires au même cercle ADBE, sont les Pôles de ce dernier cercle.

Démonstr. Puisque le cercle AGBF est perpendiculaire [H] au cercle ADBE, sa circonférence passe par les Pôles de ce cercle (a) : & par une raison pareille, celle du cercle DGEF y passe aussi. Ainsi, les Pôles du cercle ADBE sont en même temps dans la circonférence du cercle AGBF & dans celle du cercle DGEF, & par conséquent, ils sont des points communs à ces deux circonférences. Or (b), ces deux circonférences n'ont de points communs que les points G & F auxquels elles se coupent. Donc les points G & F sont les Pôles du cercle ADBE, & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

192. IL suit aussi de ce théorème, que *si dans une Sphère, un arc d'un grand cercle qui est perpendiculaire à un autre, est le quart de la circonférence d'un cercle, l'extrémité de cet arc sera l'un des Pôles de cet autre cercle.*

* Fig. 67. Dans la Sphère X *, l'extrémité G de l'arc

AG ; qui est le quart de la circonférence du grand cercle AGBF perpendiculaire au cercle ADBE , est l'un des Pôles de ce dernier cercle.

Démonstr. Les Pôles du cercle ADBE sont (a) dans la circonférence du cercle AGBF ; (a) N. 190. puisque [H] le dernier de ces deux cercles est perpendiculaire au premier : & ces mêmes Pôles sont également éloignés des points A & B de la circonférence du cercle ADBE ; puisque (b) les Pôles d'un cercle sont également (b) N. 187. éloignés de tous les points de sa circonférence. Or, l'extrémité G de l'arc AG est le seul point de la partie AGB de la circonférence du cercle AGBF , qui soit également éloigné des points A & B , de la circonférence du cercle ADBE ; puisque (c) cette partie est la moitié de la cir- (c) N. 186. conférence du cercle AGBF dont l'arc AG est un quart [H] , & dont par conséquent l'arc GB est un autre quart. Donc, l'extrémité G de l'arc AG est l'un des Pôles du cercle ADBE ; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

193. IL suit enfin de ce même théorème, que si dans une Sphère, deux arcs de grands cercles, qui sont tirés d'un même point, sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle, ce point sera l'un des Pôles du cercle qui passera par l'autre extrémité de ces arcs.

Dans la Sphère X *, le point G duquel on a tiré les arcs GA & GD qui sont chacun le * Fig. 67.

quart de la circonférence d'un cercle, est l'un des Pôles du cercle ADBE qui passe par les extrémités A & D de ces arcs.

Constr. Du centre C de la Sphère X, tirez aux points A, D & G, les lignes droites CA, CD & CG.

Démonstr. Les arcs GA & GD sont les mesures l'un de l'angle GCA, & l'autre de l'angle GCD : puisque le centre C de la Sphère X, qui [c] est le sommet de ces angles, est aussi (a) le centre de ces arcs : & [H] ces mêmes arcs sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Ainsi, la ligne CG est perpendiculaire à chacune des lignes CA & CD avec lesquelles elle a le point C de commun ; & par conséquent, elle l'est au plan de ces lignes (b), c'est-à-dire, au cercle ADBE. Or, puisque la ligne CG est perpendiculaire au cercle ADBE, & qu'elle passe par le centre C de ce cercle, on démontrera de la même manière dont on l'a fait dans ce théorème (c), que son extrémité G est également éloignée de tous les points de la circonférence de ce cercle ; & par conséquent, que le point G est l'un des Pôles de ce même (d) cercle (d). Donc, C. Q. F. D.



CHAPITRE II.

Des angles qui sont formés par les circonférences des cercles de la Sphère.

THEOREME.

194. **L** Es angles qui sont formés sur la surface d'une Sphère par des arcs de cercles, sont égaux aux angles que les plans de ces arcs forment entr'eux.

L'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphère X, est égal à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD de ces arcs. * Fig. 68,

Constr. Du point B élevez (a) au diamètre (a) E. I. 1. commun BD des cercles BADF & BCDE, les perpendiculaires GH & IK, l'une dans le plan du premier, & l'autre dans le plan du dernier.

Démonstr. La ligne BG & l'arc BA sont [c] l'une & l'autre dans un même plan, & perpendiculaires au même diamètre BD. Or, il en est de même [c] de la ligne BK & de l'arc BC; & [c] le point B est commun à ces lignes & à ces arcs. Ainsi, l'ouverture GBK de ces lignes est égale à l'ouverture ABC de ces arcs. Mais (b), (b) E. I. 11. cette ouverture GBK est aussi égale à celle des plans BAD & BCD de ces mêmes arcs; puisque [c] les lignes BG & BK sont des perpendiculaires à la commune section BD de ces

B b

plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section. Donc l'ouverture ABC des arcs BA & BC est égale à celle des plans BAD & BCD de ces arcs; & par conséquent, puisque (a) ces ouvertures sont des angles, l'angle ABC formé par les arcs BA & BC, est égal à l'angle formé par les plans BAD & BCD de ces arcs. Donc, C. Q. F. D.

(a) E. l. 1.
d. 8.

COROLLAIRE I.

195. IL suit de ce théorème, 1^{ent} que si un angle qui est formé sur la surface d'une Sphère par deux arcs de cercles, est un angle droit, les plans de ces arcs seront perpendiculaires l'un à l'autre: 2^{ent} que si cet angle est aigu, il sera égal à l'inclinaison de ces plans: 3^{ent} enfin, que si ce même angle est obtus, il sera égal au supplément de l'inclinaison de ces mêmes plans.

Premièrement.

* Fig. 69. Si l'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphère X, est un angle droit, les plans BAD & BCD de ces arcs sont perpendiculaires l'un à l'autre.

(b) N. 194. Constr. La même que la précédente (b).

Démonstr. L'angle ABC est égal [c] à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC: & l'angle qui est formé par ces plans, est égal (c) à l'angle GBK; puisque les lignes BG & BK sont [c] des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans

(c) N. 194.

l'autre, du même point B de cette commune section. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle GBK; & par conséquent, puisque le premier est droit [H], le dernier l'est aussi. Or, puisque l'angle GBK est droit, la ligne BK qui est perpendiculaire [c] à la ligne BD, l'est aussi à la ligne BG. Ainsi, elle est perpendiculaire au plan BAD de ces lignes (a); & par conséquent, (a) E. I. 11. le plan BCD dans lequel elle est, lui est aussi perpendiculaire (b). Donc, C. Q. F. 1^o D. (b) E. I. 11. p. 18.

Secondement.

Si l'angle ABC * que les arcs BA & BC * Fig. 70. forment sur la surface de la Sphère X, est un angle aigu, il est égal à l'inclinaison du plan BCD au plan BAD.

Constr. La même que la précédente (c). (c) N. 194.

Démonstr. On démontre de la même manière dont on vient de le faire dans la première partie de ce corollaire, que l'angle ABC est égal à l'angle GBK. Ainsi, puisque [H] le premier est aigu, le dernier l'est aussi. Mais, puisque l'angle GBK est aigu, & que les lignes BG & BK qui le forment, sont [c] des perpendiculaires à la commune section BD des plans BAD & BCD, qui sont tirées, l'une dans l'un de ces plans & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section, cet angle est l'inclinaison du plan BCD au plan BAD (d). Donc, l'angle ABC est égal à l'inclinaison de ces deux plans; & par conséquent, C. Q. F. 2^o D. (d) E. I. 12. d. 5.

Fig. 68. Enfin, si l'angle ABC * que les arcs BA & BC forment sur la surface de la Sphère X , est un angle obtus, il est égal au supplément de l'inclinaison du plan BCD au plan $BADF$.

(a) N. 194. *Constr.* La même que la précédente (a).

Démonstr. On démontre encore de la même manière dont on l'a fait dans la première partie de ce même corollaire, que l'angle ABC est égal à l'angle GBK . Ainsi, puisque $[H]$ le premier est obtus, le dernier l'est aussi; & puis-

(b) N. 4. 1. que (b) le dernier est le supplément de l'angle KBH , l'angle ABC est égal au supplément de

(c) E. 1. 11. l'angle KBH . Mais (c), l'angle KBH est l'inclinaison du plan BCD de l'arc BC , au plan $BADF$ de l'arc BA . Car; il est aigu; puisque l'angle GBK est obtus $[D]$; & les lignes BK & BH qui le forment, sont $[c]$ des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section. Donc, l'angle ABC est égal au supplément de l'inclinaison du plan BCD au plan $BADF$; & par conséquent, C. Q. F. 3^o D.

COROLLAIRE II.

196. IL suit aussi de ce théorème, que si deux arcs qui forment un angle sur la surface d'une Sphère, sont chacun le quart de la circonférence d'un grand cercle, l'arc du grand cercle, qui sera intérieur à cet angle, & compris entre les points auxquels ces quarts de circonfé-

rences se terminent , sera la mesure de ce même angle.

Si les arcs BA * & BC qui forment l'angle ABC sur la surface de la Sphère X , sont chacun le quart de la circonférence d'un grand cercle , l'arc AC du grand cercle EACF, (lequel arc est intérieur à cet angle ABC , & compris entre les points A & C auxquels ces quarts de circonférences se terminent ,) sera la mesure de ce même angle. + Fig. 71.

Constr. Du centre G de la Sphère X tirez aux points A & C , les rayons GA & GC.

Démonstr. L'angle ABC est égal (a) à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC. Or , l'angle qui est formé par ces plans est égal à l'angle AGC (b). Car , puisque les arcs BA & BC sont chacun [H] le quart de la circonférence d'un cercle , chaque angle BGA & BGC est un angle droit ; & par conséquent , les lignes GA & GC qui [c] sont tirées , l'une dans le plan BAD & l'autre dans le plan BCD , du même point G de la commune section BD de ces plans , sont perpendiculaires à cette commune section. Donc , l'angle ABC est égal à l'angle AGC. Mais , l'arc AC est la mesure de l'angle AGC ; puisque cet arc étant [H] un arc d'un grand cercle de la Sphère X , il a pour centre (c) le centre G de cette Sphère , qui [c] est le sommet de cet angle AGC. Donc , l'arc AC est la mesure de l'angle ABC ; & par conséquent , C. Q. F. D. (a) N. 194. (b) E. I. 11. (c) N. 184.

197. IL suit de ce corollaire , que *les angles opposés qui sont formés sur la surface d'une Sphère par les moitiés des circonférences de deux grands cercles, sont égaux.*

* Fig. 71. Les angles opposés ABC & ADC , qui sont formés sur la surface de la Sphère X par les moitiés BAD & BCD des circonférences des deux grands cercles $BADH$ & $BCDI$, sont égaux.

Constr. Divisez la circonférence du demi-cercle BAD en deux parties égales BA & DA (a).
P. 30. Divisez aussi la circonférence du demi-cercle BCD en deux parties égales BC & DC (b).
(b) E. 1. 3. P 30. Par les points A & C , faites passer l'arc AC d'un grand cercle.

Démonstr. Les arcs BA & BC sont chacun $[c]$ le quart de la circonférence d'un grand cercle; puisque $[H]$ les arcs BAD & BCD sont chacun la moitié de la circonférence d'un grand cercle. Ainsi, l'arc AC est la mesure de l'angle ABC (c). Or, le même arc AC est aussi la mesure de l'angle ADC (d); puisque les arcs DA & DC sont aussi chacun $[c]$ le quart de la circonférence d'un grand cercle. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle ADC ; & par conséquent, C. Q. F. D.

(c) N. 196. (d) N. 196. *Autre Démonstr.* L'angle ABC est égal (e) à l'angle qui est formé par les plans des arcs BA & BC ; & l'angle ADC est égal (f) à l'angle qui est formé par les plans des arcs DA & DC ;

Or, les plans des arcs BA & BC, & ceux des arcs DA & DC, sont les mêmes; puisque [H] les arcs BA & DA sont la circonférence du même demi-cercle BAD, & que les arcs BC & DC sont celle du même demi-cercle BCD. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle ADC; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

198. IL suit encore du même théorème (a), (a) N. 194. que la somme des angles de suite qui sont formés sur la surface d'une Sphère par deux arcs de cercles, est égale à celle de deux angles droits.

La somme des angles de suite ABC * & CBF, * Fig. 70. que les arcs ABF & BC, forment sur la surface de la Sphère X, est égale à celle de deux angles droits.

Constr. La même que celle du No 194.

Démonstr. L'angle ABC est égal (b) à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC: & l'angle CBF est égal (c) à l'angle qui est formé par les plans BCD & BFD des arcs BC & BF. Or, l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD est égal à l'angle GBK (d); puisque les lignes BG & BK sont des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section: & l'angle qui est formé par les plans BCD & BFD est égal à l'angle KBH (e); puisque les lignes BK & BH

sont pareillement [c] des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle GBK, l'angle CBF à l'angle KBH; & par conséquent, puisque la somme des angles GBK & KBH qui sont des angles de suite, est égale à celle de deux angles droits (a), la somme des angles ABC & CBF lui est aussi égale. Donc, C. Q. F. D.

(a) E. I. 1.
P. 13.

COROLLAIRE V.

199. IL suit enfin de ce même théorème (b) N. 194. me (b), que les angles opposés au sommet, qui sont formés sur la surface d'une Sphère par deux arcs de cercles, sont égaux.

* Fig. 70. Les angles ABC * & FBE qui sont opposés au sommet, & formés sur la surface de la Sphère X par les arcs ABF & CBE, sont égaux.

Constr. La même que celle du N° 194.

(c) N. 194. Démonstr. L'angle ABC est égal (c) à l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD des arcs BA & BC: & l'angle FBE est égal (d) à l'angle qui est formé par les plans BFD & BED des arcs BF & BE. Or, l'angle qui est formé par les plans BAD & BCD, est égal à l'angle GBK (e); puisque les lignes BG & BK sont [c] des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section: & l'angle qui est formé par les plans BFD & BED, est égal

(c) E. I. 11.
d. 5.

égal (a) à l'angle HBI; puisque les lignes BH^{(a) E. 1. 22.} & BI sont aussi [c] des perpendiculaires à la commune section BD de ces plans, qui sont tirées, l'une dans l'un & l'autre dans l'autre, du même point B de cette commune section. Donc, l'angle ABC est égal à l'angle GBK, l'angle FBE à l'angle HBI; & par conséquent, puisque les angles GBK & HBI qui sont opposés au sommet, sont égaux (b), les angles ABC^{(b) E. 1. 21.} & FBE sont aussi égaux. Donc, C. Q. F. D. ^{P 15.}

CHAPITRE III.

Des Triangles qui sont formés par les circonférences des cercles de la Sphère.

DÉFINITIONS.

200. **O**N appelle *Triangle-Sphérique*, un triangle qui est formé sur la surface d'une Sphère, par les arcs de trois grands cercles de cette Sphère.

Le triangle ABC qui est formé sur la surface de la Sphère X par les arcs AB, AC & CB des trois grands cercles FABK, DACE & IBCH, est un Triangle-Sphérique.* * Fig. 721

201. Les côtés d'un triangle Sphérique, sont les arcs qui forment ce triangle.

Les côtés du triangle-Sphérique ABC sont les arcs AB AC & CB qui le forment.* * Fig. 722

202. Les angles d'un triangle-Sphérique

font les angles qu'on forme par les côtés de ce triangle.

• Fig. 72. Les angles du triangle-Sphérique ABC sont, 1° l'angle BAC, qui est formé par les arcs AB & AC : 2° l'angle ABC, qui est formé par les arcs BA & BC : 3° l'angle ACB, qui est formé par les arcs CA & CB.

203. On tire la dénomination des triangles-Sphériques, ou de leurs côtés, ou de leurs angles. Or, lorsque l'on tire de ses côtés la dénomination d'un triangle-Sphérique, on nomme *Triangle-équilateral*, celui dont tous les côtés sont égaux : *Triangle-isocele*, celui qui n'a que deux de ses côtés égaux : *Triangle-scalène*, celui dont tous les côtés sont inégaux : & *Triangle-quadrantal*, celui dont quelque côté est le quart de la circonférence d'un cercle.

Et lorsque l'on tire de ses angles la dénomination d'un triangle-Sphérique, on appelle *Triangle-rectangle*, celui dont un des angles est droit : *Triangle-obtusangle*, celui dont un des angles est obtus : *Triangle-acutangle*, celui dont tous les angles sont aigus : & en général, *Triangle-obliquangle*, celui qui n'a aucun angle droit.

PROPOSITION I. Théorème.

204. Si trois grands cercles ont chacun pour Pôle le sommet de l'un des angles d'un triangle-Sphérique quelconque décrit sur la surface d'une Sphère, les circonférences de ces cercles formeront sur cette même surface d'autres triangles,

dont les sommets des angles seront réciproquement les Pôles des cercles dont les circonférences forment le premier, chacun de chacun.

Les circonférences des cercles HDLF*, HEME* & OEDI qui ont pour Pôles, l'un le sommet de l'angle A du triangle-Sphérique ABC décrit sur la surface de la Sphère X, l'autre le sommet de l'angle B, & le dernier le sommet de l'angle C, forment sur la même surface d'autres triangles, (par exemple le triangle DEF,) dont les sommets des angles, (par exemple D, E & F,) sont réciproquement les Pôles des cercles OACL, BCNI & BAMK, dont les circonférences forment le triangle ABC, chacun de chacun.

* Fig. 73.

Démonstr. Si l'on suppose qu'un arc d'un grand cercle, est tiré du point D au point C, cet arc sera (a) le quart de la circonférence (a) N. 188. d'un cercle; puisque [H] le point C est l'un des Pôles du cercle OEDI: & il en seroit de même (b) (b) N. 188. de l'arc d'un autre grand cercle, qui seroit tiré du même point D au point A; puisque [H] le point A est l'un des Pôles du cercle HDLF. Ainsi (c), le point D est l'un des Pôles du cercle OACL. Pareillement, si l'on suppose qu'un arc d'un grand cercle est tiré du point E au point C, cet arc sera (d) le quart de la circonférence d'un cercle; puisque [H] le point C est l'un des Pôles du cercle OEDI: & il en seroit de même (e) de l'arc d'un autre grand cercle qui seroit tiré du même point E au point B.

- puisque [H] le point B est l'un des Pôles du
 (a) N. 193. cercle HEMF. Ainsi (a), le point E est l'un des
 Pôles du cercle BCNI. Enfin, si l'on suppose
 qu'un arc d'un grand cercle est tiré du point F
 (b) N. 188. au point A, cet arc sera (b) le quart de la cir-
 conférence d'un cercle; puisque [H] le point A
 est l'un des Pôles du cercle HDLF : & il en
 (c) N. 188. seroit de même (c) de l'arc d'un autre grand
 cercle qui seroit tiré du même point F au
 point B; puisque [H] le point B est l'un des
 (d) N. 193. Pôles du cercle HEMF. Ainsi (d), le point F
 est l'un des Pôles du cercle BAMK. Or, ces
 points D, E & F sont les sommets des angles
 du triangle DEF, qui est formé par les circon-
 férences des cercles HDLF, HEMF & OEDF
 dont les Pôles sont [H] les sommets des an-
 gles A, B & C du triangle ABC : & les cer-
 cles OACL, BCNI & BAMK sont ceux dont
 les circonférences forment ce triangle ABC.
 Donc, les sommets des angles du triangle DEF
 sont les Pôles des cercles dont les circonférences
 forment le triangle ABC; & par conséquent,
 C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

205. IL suit de ce théorème, que si les
 cercles dont les circonférences forment un trian-
 gle sur la surface d'une Sphère, ont chacun pour
 Pôle le sommet de l'un des angles d'un autre trian-
 gle-Sphérique quelconque décrit sur la même sur-
 face; les côtés de ce premier triangle seront les
 mesures, l'un de l'un des angles, l'autre d'un au-

me angle, & le troisième du supplément du troisième angle de cet autre triangle.

Les côtés DF *, DE & EF du triangle DEF * Fig. 73. qui est formé sur la surface de la Sphère X par les circonférences des cercles HDLF, OEDI & HEMF, dont les Pôles sont les sommets A, C & B des angles du triangle-Sphérique ABC décrit sur la même surface, sont les mesures, l'un de l'angle BAC de ce dernier triangle, l'autre de l'angle BCA, & le troisième, du supplément de l'angle ABC.

Démonstr. L'arc HDK est le quart de la circonférence d'un cercle (a); puisque le point F (a) N. 188. étant (b) l'un des Pôles du cercle BAMK, le (b) N. 204. point H qui est diamétralement opposé à ce point F, est l'autre Pôle de ce même cercle: & l'arc DKL est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (c), puisque (d) le point D est l'un (c) N. 188. des Pôles du cercle OACL. Ainsi, si de cha- (d) N. 204. cun de ces arcs on retranche l'arc DK qui leur est commun, les restes qui sont les arcs HD & KL, seront égaux. Mais (e), l'arc KL est la mesure (e) N. 196. de l'angle KAL; puisque le point A étant [H] l'un des Pôles du cercle HDLF, les arcs AMK & ACL sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (f). Donc, l'arc HD est aussi (f) N. 188. la mesure de l'angle KAL; & par conséquent, puisque (g) l'angle BAC est le supplément de (g) N. 193. cet angle, & que (h) le côté DF est le supplé- (h) N. 6. † ment de cet arc, le côté DF est la mesure de l'angle BAC. Pareillement, l'arc DEO est le

- (a) N. 188. quart de la circonférence d'un cercle (a), puis
 (b) N. 204. que (b) le point D est l'un des Pôles du cercle OACL : & l'arc EOG est aussi le quart de
 (c) N. 188. la circonférence d'un cercle (c), puisque (d) le
 (d) N. 204. point E est l'un des Pôles du cercle GBNI. Ainsi , si de chacun de ces arcs on retranche l'arc EO qui leur est commun , les restes qui sont le côté DE & l'arc OG , seront égaux.
 (e) N. 196. Mais (e), l'arc OG est la mesure de l'angle BCA ; puisque le point C étant [H] l'un des Pôles du cercle OEDI , les arcs CAO & CBG sont cha-
 (f) N. 188. cun le quart de la circonférence d'un cercle (f) : Donc , le côté DE est aussi la mesure de l'angle BCA. Enfin , l'arc HEM est le quart de la
 (g) N. 188. circonférence d'un cercle (g) , puisque [D] le point H est l'un des Pôles du cercle BAMK : & l'arc EMN est aussi le quart de la circonfé-
 (h) N. 188. rence d'un cercle (h) , puisque (i) le point E est
 (i) N. 204. l'un des Pôles du cercle BCNI. Ainsi , si de chacun de ces arcs on retranche l'arc EM qui leur est commun , les restes qui sont les arcs HE
 (k) N. 196. & MN , seront égaux. Mais (k) l'arc MN est la mesure de l'angle ABC ; puisque le point B étant [H] l'un des Pôles du cercle HEMF , les arcs BAM & BCN sont chacun le quart de
 (l) N. 188. la circonférence d'un cercle (l). Donc , l'arc HE est aussi la mesure de l'angle ABC ; & par con-
 (m) N. 6. §. séquent , puisque (m) le côté EF est le supplément de cet arc , il est la mesure du supplément de cet angle. Donc , C. Q. F. D.

S C H O L I E.

206. Ce que l'on vient de démontrer du triangle DEF * est vrai aussi de chacun des autres * Fig. 73. triangles que les circonférences des mêmes cercles HDLF, HEMF & OEDI, forment sur la surface de la Sphère X. Ainsi, les sommets H, E & D des angles du triangle HED, sont aussi les Pôles des cercles BAMK, BCNI & OACL : & ses côtés HE, ED & HD, sont les mesures, l'un de l'angle ABC du triangle ABC, l'autre de l'angle BCA, & le troisième, du supplément de l'angle BAC ; comme il est facile de s'en convaincre par des démonstrations pareilles à celles de ce théorème & de son corollaire.

P R O P O S I T I O N II. Théorème.

207. Dans un triangle-Sphérique quelconque, les trois angles pris ensemble valent plus de deux angles droits, & moins de six.

Dans le triangle-Sphérique AHBICKA*, les * Fig. 74. trois angles HAK, HBI & KCI pris ensemble, valent plus de deux angles droits, & moins de six.

Constr. Tirez du point A aux points B & C, les lignes droites AB & AC, & du point B au point C, la ligne droite BC. Du point D pris à volonté dans la commune section BG des plans des arcs BHA & BIC, élevez à cette commune section (a), l'une dans l'un de ces plans (a) l. 1. 1. & l'autre dans l'autre, les perpendiculaires DE p. 11. & DF, qui rencontrent en des points E & F, les côtés BA & BC du triangle-rectiligne ABC,

prolongés s'il est nécessaire. Enfin, tirez du point E au point F, la ligne droite EF.

Démonstr. Premièrement, l'angle HBI est
 (a) N. 194. égal (a) à l'angle qui est formé par les plans
 BGA & BGC des arcs BHA & BIC : & l'an-
 (b) E. I. 11. gle qui est formé par ces plans est égal (b) à
 d. 5. l'angle EDF ; puisque les lignes DE & DF
 sont [c] des perpendiculaires à la commune
 section BG de ces plans, qui sont tirées, l'une
 dans l'un & l'autre dans l'autre, du même
 point D de cette commune section. Donc, l'an-
 gle HBI est égal à l'angle EDF. Mais, dans
 les triangles rectilignes EDF & EBF qui ont
 le côté EF commun, les côtés DE & DF sont
 (c) E. I. 1. plus petits (c) que les côtés BE & BF ; puis-
 P. 19. que [c] les triangles BDE & BDF sont rec-
 (d) E. I. 1. tangles l'un & l'autre en D. Donc (d), l'an-
 P. 21. gle EDF est plus grand que l'angle EBF ou ABC ;
 & par conséquent, l'angle HBI est plus grand
 que l'angle ABC. Or, on démontre de la même
 manière, que l'angle HAK est plus grand
 que l'angle BAC ; & que l'angle KCI est
 plus grand que l'angle ACB. Donc, les trois
 angles HBI, HAK & KCI pris ensemble,
 valent plus que les trois angles ABC,
 BAC & ACB pris ensemble ; & par conséquent,
 (e) E. I. 1. puisque (e) les trois derniers, pris ensemble, ne
 P. 32. valent que deux angles droits, les trois pre-
 miers, pris ensemble, valent plus de deux angles
 droits. Donc, C. Q. F. 10 D.

Secondement, l'angle intérieur KCI étant
 pris

pris avec l'angle extérieur ICM, vaut deux angles droits (a), puisque ces deux angles sont de suite. Or, il en est de même de l'angle HAK pris avec l'angle HAL; & de l'angle HBI pris avec l'angle HBN. Donc, les angles tant intérieurs qu'extérieurs du triangle-sphérique AHBICKA pris ensemble, valent six angles droits; & par conséquent, les intérieurs seuls pris ensemble, valent moins de six angles droits, Donc, C. Q. F. 2^o D.

COROLLAIRE.

208. IL suit de ce théorème, que dans un triangle-sphérique quelconque, chaque angle extérieur est plus petit que la somme des angles intérieurs qui lui sont opposés.

Dans le triangle-Sphérique AHBICKA*, * Fig. 74, l'angle extérieur ICM est plus petit que la somme des angles intérieurs HAK & HBI qui lui sont opposés.

Démonstr. L'angle KCI pris avec l'angle ICM vaut deux angles droits (b), puisque (b) N. 198, ces deux angles sont de suite. Or (c), le même (c) N. 207, angle KCI pris avec les angles HAK & HBI, vaut plus de deux angles droits. Donc, l'angle ICM est plus petit que les angles HAK & HBI pris ensemble; & par conséquent, C. Q. F. D.

PROPOSITION III. Théorème,

209. Dans un triangle-Sphérique quelconque, deux côtés pris ensemble, valent plus que le troi-

D d

sieme ; & les trois côtés pris ensemble , valent moins que la circonférence d'un cercle.

* Fig. 75. Dans le triangle-Sphérique ABC* , les deux côtés, par exemple AB & BC pris ensemble , valent plus que le côté AC : & les trois côtés AB , BC & AC pris ensemble , valent moins que la circonférence d'un cercle.

Constr. Du centre G de la Sphère X , tirez aux sommets des angles A , B & C, les rayons GA , GB & GC.

Démonstr. L'arc AB est la mesure de l'angle AGB ; puisqu'étant (a) un arc d'un grand
(a) N. 200. cercle de la Sphère X, il a pour centre (b) le
(b) N. 184. centre G de cette Sphère, qui est [c] le sommet de cet angle. Par des raisons pareilles, l'arc BC est la mesure de l'angle BGC ; & l'arc AC est celle de l'angle AGC. Or, ces trois angles forment ensemble au centre G de cette même Sphère , un angle solide G. Donc *premièrement* (c), les deux premiers AGB & BGC pris ensemble , valent plus que le troisième AGC ; & par conséquent , les arcs AB & BC pris ensemble, valent plus que l'arc AC. *Secondement* (d), les trois AGB, BGC & AGC pris ensemble, valent moins que quatre angles droits ; & par conséquent, les arcs AB, BC & AC pris ensemble, valent moins que la circonférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

(c) E. 1. 11. P. 20.
(d) E. 1. 11. P. 21,

COROLLAIRE.

210. IL suit de ce théorème , que *dans un triangle-Sphérique quelconque, chaque côté est*

plus petit que la moitié de la circonférence d'un cercle.

Dans le triangle-Sphérique ABC^* , chaque * Fig. 75.
côté AB , AC & BC est plus petit que la moitié
de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Si le côté AB étoit la moitié
de la circonférence d'un cercle, ou plus de
cette moitié, les côtés AB , AC & BC pris en-
semble, vaudroient plus de la circonférence d'un
cercle; puisque (a) les côtés AC & BC pris en- (a) N. 109.
semble, valent plus que le côté AB . Mais (b), (b) N. 109.
les côtés AB , AC & BC pris ensemble, ne va-
lent pas plus de la circonférence d'un cercle.
Donc, le côté AB n'est ni la moitié de la
circonférence d'un cercle, ni plus de cette
moitié; & par conséquent, puisque la même
chose se démontre de la même manière, & du
côté AC , & du côté BC , chaque côté AB ,
 AC & BC est plus petit que la moitié de la cir-
conférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION IV. Théorème.

211. Si deux triangles-Sphériques décrits
sur des Sphères égales, ont un angle égal à un
angle, & les côtés qui forment ce premier angle
égaux à ceux qui forment ce second angle, cha-
cun à chacun, ils seront entièrement égaux.

Si dans les triangles Sphériques ABC^* & DEF , * Fig. 76.
l'angle A est égal à l'angle EDF ; & si les côtés
 AB & AC qui forment cet angle A , sont égaux
aux côtés DE & DF qui forment cet angle EDF ,

D d ij

212 **TAXITE COMPLET**

chacun à chacun, ces deux triangles seront entièrement égaux.

Les côtés AB, AC, DE & DF sont semblablement posés, ou différemment posés. Or :

212. Premièrement, *Lorsque les côtés AB, AC, DE & DF sont semblablement posés.*

Constr. Posez le triangle ABC sur le triangle DEF, de manière que le point A étant sur le point D, le côté AC soit sur le côté DF.

Démonstr. Le sommet de l'angle A est [c] sur le sommet de l'angle EDF, & le côté AC sur le côté DF; donc, puisque [H] l'angle A est égal à l'angle EDF, l'autre côté AB est sur l'autre côté DE. Ainsi, le côté AC qui [H] est égal au côté DF; est posé [c] sur ce côté DF; & l'extrémité A de l'un est [c] sur l'extrémité D de l'autre: donc, l'autre extrémité C du premier est sur l'autre extrémité F du second. † Pareillement, le côté AB qui [H] est égal au côté DE; est posé [D] sur ce côté DE; & l'extrémité A de l'un est [c] sur l'extrémité D de l'autre: donc, l'autre extrémité B du premier est sur l'autre extrémité E du second. Ainsi, les sommets A, C & B des angles du triangle ABC sont sur les sommets D, F & E des angles du triangle DEF, chacun sur chacun; & par conséquent, le triangle ABC est entièrement égal au triangle DEF.

213. Secondement, *Lorsque les côtés ab, ac, DE & DF sont différemment posés.*

Constr. Tirez par les sommets D, E & F des
† Il faut faire attention à ce que [c] ces côtés AB, AC, DE, DF, &c. auront aussi le même point G pour centre.

angles du triangle DEF, & par le centre G de la Sphère sur la surface de laquelle ce triangle est décrit, les diamètres DH, EI & FK.

Démonstr. 1^{re} L'angle α est égal [H] à l'angle EDF; l'angle EDF est égal (a) à l'angle EHF, (a) N. 197. puisque (b) les arcs DFH & DEH sont chacun (b) N. 186. la moitié de la circonférence d'un grand cercle; & l'angle EHF est égal (c) à l'angle IHK (c) N. 199. qui lui est opposé au sommet: donc l'angle α est égal à l'angle IHK. 2^{re} Les arcs ab & ac sont égaux aux arcs HI & HK, chacun à chacun; puisque [H] l'arc ab est égal à l'arc DE, l'arc ac à l'arc DF, & que les angles DGE & HGI étant [c] opposés au sommet, de même que les angles DGF & HGK, l'arc DE est égal (d) à l'arc HI, & l'arc DF à l'arc HK. (d) E. 1. 1.

Ainsi, dans les triangles abc & HIK, l'angle α est égal à l'angle IHK; & les côtés ab & ac qui forment cet angle α , sont égaux aux côtés HI & HK qui forment cet angle IHK, chacun à chacun. Donc, puisque ces côtés sont semblablement posés, ces deux triangles sont entièrement égaux (e). Mais, on démontre que le (e) N. 212. côté IK du triangle HIK, est égal au côté EF du triangle DEF, de la même manière dont on vient de démontrer que le côté HI est égal au côté DE, & le côté HK au côté DF. On démontre aussi, que l'angle HIK est égal à l'angle DEF, & l'angle HKI à l'angle DFE, de la même manière dont on vient de démontrer que l'angle IHK est égal à l'angle EDF. Donc, le trian-

114 TRAITE' COMPLET

gle HIK est entièrement égal au triangle DEF, & par conséquent, le triangle *abc* est aussi entièrement égal au même triangle DEF. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

214. IL suit de ce théorème, que si dans un triangle-Sphérique quelconque, deux côtés sont égaux, les angles qui sont opposés à ces côtés, seront aussi égaux.

* Fig. 77. Si dans le triangle-Sphérique ABC*, les côtés BA & BC sont égaux, les angles C & A le seront aussi.

Constr. Supposez qu'un arc BD d'un grand cercle, divise l'angle B en deux parties égales ABD & CBD.

Démonstr. L'angle CBD est égal [c] à l'angle ABD, le côté BC est égal [H] au côté BA, & le côté BD est commun. Donc, les triangles CBD & ABD sont entièrement égaux (a); & par conséquent, l'angle C est égal à l'angle A. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

215. IL suit de ce Corollaire, que si dans un triangle-Sphérique quelconque, tous les côtés sont égaux, tous les angles le seront aussi.

COROLLAIRE III.

216. IL suit aussi de ce même théorème, que si dans un triangle-Sphérique quelconque, deux angles sont égaux, les côtés qui sont opposés à ces angles, seront aussi égaux.

* Fig. 78. Si dans le triangle-Sphérique ABC*, les an-

gles C & A sont égaux , les côtés BA & BC le seront aussi.

Constr. Prolongez le côté BC indéfiniment vers E. Supposez ensuite que deux arcs AD & AE de deux grands cercles, passent par le sommet de l'angle A, & rencontrent l'arc CE en des points D & E pris à volonté, l'un au dessous du point B, & l'autre au dessus.

Démonstr. Si le côté BA n'étoit point égal au côté BC, il seroit égal à un arc plus grand, ou plus petit que ce côté. Or, si le côté BA étoit égal à un arc, par exemple EC, plus grand que le côté BC, les triangles BAC & ACE qui [H] ont l'angle A égal à l'angle C, & le côté AC commun, auroient aussi le côté BA égal [H] au côté CE; ainsi (a), ils seroient entièrement égaux. Pareillement, si le côté BA étoit égal à un arc, par exemple CD, plus petit que le côté BC, les triangles BAC & ACD qui [H] ont l'angle A égal à l'angle C, & le côté AC commun, auroient aussi le côté BA égal [H] au côté CD; ainsi (b), ils seroient aussi entièrement égaux. Mais, le triangle BAC n'est entièrement égal ni au triangle ACE, ni au triangle ACD; puisqu'il est plus petit que le premier, & plus grand que le dernier. Donc, le côté BA n'est égal ni à un arc plus grand, ni à un arc plus petit que le côté BC; & par conséquent, il est égal au côté BC. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

217. ENFIN, il suit de ce Corollaire, que si

dans un triangle-Sphérique quelconque, tous les angles sont égaux, tous les côtés le seront aussi.

PROPOSITION V. Théorème.

218. *Si dans un triangle-Sphérique quelconque, un angle est plus grand qu'un autre, le côté opposé à ce premier angle sera plus grand que le côté opposé à cet autre angle.*

* Fig. 79. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, l'angle A est plus grand que l'angle C, le côté BC sera plus grand que le côté BA.

Constr. Supposez qu'un arc AD d'un grand cercle divise l'angle A en deux parties, dont l'une DAC soit égale à l'angle C.

Démonstr. Dans le triangle ABD, les côtés BD & DA pris ensemble, valent plus que le
 (a) N. 109. côté BA (a). Or, le côté DA est égal au côté DC (b); puisque dans le triangle ADC, les
 (b) N. 216. angles C & DAC sont égaux [c]. Donc, les côtés BD & DC pris ensemble, (c'est-à-dire, le côté BC,) valent plus que le côté BA; & par conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

219. IL suit de ce théorème, que *dans un triangle-Sphérique quelconque, le plus grand côté est opposé au plus grand angle.*

PROPOSITION VI. Théorème.

220. *Si dans un triangle-Sphérique quelconque, un côté est plus grand qu'un autre, l'angle opposé à ce premier côté sera plus grand que l'angle opposé à cet autre côté.*

* Fig. 80. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, le côté

côté BA est plus grand que le côté BC, l'angle C sera plus grand que l'angle A.

Démonstr. Si l'angle C étoit égal à l'angle A, le côté BA seroit égal au côté BC (a). Et si (a) N. 26: l'angle C étoit moins grand que l'angle A, le côté BA seroit moins grand que le côté BC (b). (b) N. 18: Or, le côté BA n'est ni égal au côté BC, ni moins grand que le côté BC; puisque [H] il est plus grand que ce côté. Donc; l'angle C n'est ni égal à l'angle A; ni moins grand que l'angle A; & par conséquent, il est plus grand que l'angle A. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

221. Il suit de ce théorème, que dans un triangle-Sphérique quelconque; le plus grand angle est opposé au plus grand côté.

PROPOSITION VII. Théorème.

222. Dans un triangle-Sphérique rectangle; chaque angle adjacent à l'hypoténuse est de même espèce que le côté qui lui est opposé.

Premièrement.

223. Si dans le triangle-Sphérique ABC* Fig. 81: qui est rectangle en A, le côté AB est le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C sera droit:

Démonstr. L'arc AB qui est perpendiculaire à l'arc AC, puisque [H] l'angle A est droit, est le quart de la circonférence d'un cercle [H]: ainsi, son extrémité B est l'un des Pôles de cet arc AC (c); & par conséquent, l'arc BC qui passe (c) N. 19: par ce point B; est aussi perpendiculaire à ce même arc AC (d). Or; puisque l'arc BC est (d) N. 18:

E c

perpendiculaire à l'arc AC, l'angle C est droit.

Secondement.

- * Fig. 82. 224. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le côté AB est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle ACB sera aigu.

Constr. Prolongez le côté AB vers D, jusqu'à ce que l'arc AD soit le quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite qu'un arc CD d'un grand cercle, passe par le sommet de l'angle ACB, & par le point D.

Démonstr. Dans le triangle-Sphérique ADC, (a) N. 223. l'angle ACD est droit (a); puisque [c] le côté AD est le quart de la circonférence d'un cercle. Or, l'angle ACB est moins grand que l'angle ACD; puisqu'il n'en est qu'une partie. Donc, l'angle ACB est moins grand qu'un angle droit;

(b) E. 1. 1. & par conséquent, il est aigu (b).

d. 12.

Troisièmement.

225. Enfin, si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le côté AB est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle ACB sera obtus.

Constr. Prenez sur le côté AB un arc AD égal au quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite qu'un arc CD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle ACB, & par le point D.

Démonstr. Dans le triangle-Sphérique ADC, (c) N. 223. l'angle ACD est droit (c); puisque [c] le côté AD est le quart de la circonférence d'un cercle.

de. Or, l'angle ACB est plus grand que l'angle ACD; puisque ce dernier angle n'est qu'une partie du premier. Donc, l'angle ACB est plus grand qu'un angle droit; & par conséquent, il est obtus (a).

(a) E. l. 1.
S. 11.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

226. IL suit de ce théorème, que dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque côté adjacent à l'hypoténuse est de même espèce que l'angle qui lui est opposé.

Premièrement.

227. Si dans le triangle-Sphérique ABC* *Fig. 24. qui est rectangle en A, l'angle C est droit, le côté AB sera le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Si le côté AB étoit moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit aigu (b): & si ce côté étoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit obtus (c). Or, l'angle C n'est ni aigu, ni obtus; puisqu'il est droit [H]. Donc, le côté AB n'est ni moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ni plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, il est le quart de la circonférence d'un cercle.

Secondement.

228. Si dans le triangle-Sphérique ABC* *Fig. 24. qui est rectangle en A, l'angle C est aigu, le côté AB sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Si le côté AB étoit le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit droit (a) : & si ce côté étoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit obtus (b). Or, l'angle C n'est ni droit, ni obtus; puisqu'il est aigu [H]. Donc, le côté AB n'est ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, il est moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

Troisièmement.

229. Enfin, si dans le triangle-Sphérique *Fig. 86.* ABC * qui est rectangle en A, l'angle C est obtus, le côté AB sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Si le côté AB étoit le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit droit (c) : & si ce côté étoit moins que le quart de la circonférence d'un cercle, l'angle C seroit aigu (d). Or, l'angle C n'est ni droit, ni aigu; puisqu'il est obtus [H]. Donc, le côté AB n'est ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, il est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

230. Il suit de ce corollaire, que si de l'un quelconque des angles d'un triangle-Sphérique obtus-anglé, on tire un arc de cercle perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, cet arc passera dans

le triangle \dagger , lorsque les angles adjacents à ce côté seront de même espèce ; & hors de ce triangle, lorsque ces angles seront de différente espèce.

Premièrement.

Si dans le triangle-Sphérique obliquangle * Fig. 87, ABC *, chaque angle A & C adjacent au côté AC est aigu, l'arc qui sera tiré du sommet de l'angle B perpendiculairement à ce côté, passera dans ce triangle.

Constr. Supposez qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B, & rencontre en un point quelconque D hors du triangle ABC, le côté AC prolongé vers ce point.

Démonstr. Si un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passeroit point dans le triangle ABC, pourroit être perpendiculaire au côté AC prolongé autant qu'il le seroit nécessaire, cet arc seroit en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle (a) ; (a) N. 228. puisque [H] le triangle ABD seroit rectangle en D, & que l'angle A de ce triangle, auquel cet arc seroit opposé, est aigu [H] : & plus que le quart de la circonférence d'un cercle (b) ; (b) N. 229. puisque [H] le triangle CBD seroit aussi rectangle en D, & que l'angle BCA étant aigu [H], l'angle BCD de ce dernier triangle, auquel ce même arc seroit aussi opposé, est obtus (c). Or, un (c) N. 198.

\dagger On entend par un arc qui passe dans un triangle, un arc qui y passe effectivement, ou qui y passeroit s'il étoit prolongé. Et par un arc qui passe hors d'un triangle, un arc qui ne passeroit point dans un triangle, quand même il seroit prolongé.

même arc ne peut être en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passera point dans le triangle ABC, ne sera point perpendiculaire au côté AC; & par conséquent, si un arc qui est tiré du sommet de cet angle est perpendiculaire à ce côté, il passe dans ce triangle.

Secondement,

Si dans le triangle-Sphérique obliquangle
 Fig. 28. ABC *, chaque angle A & C adjacent au côté AC est obtus, l'arc qui sera tiré du sommet de l'angle B perpendiculairement à ce côté, passera aussi dans ce triangle.

Constr. La même que la précédente.

Démonstr. Si un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passeroit point dans le triangle ABC, pouvoit être perpendiculaire au côté AC prolongé autant qu'il le seroit nécessaire, cet arc seroit en même temps plus que le quart
 (a) N. 229. de la circonférence d'un cercle (a); puisque [H] le triangle ABD seroit rectangle en D, & que l'angle A de ce triangle, auquel cet arc seroit opposé, est obtus [H]: & moins que le quart
 (b) N. 228. de la circonférence d'un cercle (b); puisque le triangle CBD seroit aussi rectangle en D [H], & que l'angle BCA étant obtus [H], l'angle BCD de ce dernier triangle, auquel ce même
 (c) N. 198. arc seroit aussi opposé, est aigu (c). Or, un même arc ne peut être en même temps plus que le

quart de la circonférence d'un cercle, & moins que le quart de la circonférence d'un cercle, Donc, un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B ne passera point dans le triangle ABC, ne sera point perpendiculaire au côté AC; & par conséquent, si un arc qui est tiré du sommet de cet angle est perpendiculaire à ce côté, il passe dans ce triangle.

Troisièmement.

Enfin, si dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC*, les atigles A & C qui sont adjacents au côté AC sont de différente espee, (par exemple, l'angle A aigu, & l'angle C obtus,) l'arc qui sera tiré du sommet de l'angle B perpendiculairement à ce côté, passera hors de ce triangle.

* Fig. 89.

Constr. Supposez qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B, & rencontre le côté AC en un point D pris à volonté sur ce côté.

Démonstr. Si un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B passeroit dans le triangle ABC, pouvoit être perpendiculaire au côté AC, cet arc seroit en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle (a); (a) N. 228. puisque [H] le triangle ABD seroit rectangle en D, & que l'angle A de ce triangle, auquel cet arc seroit opposé, est aigu [H]: & plus que le quart de la circonférence d'un cercle (b); puisque [H] le triangle DBC seroit aussi rectangle en D, & que l'angle C de ce dernier

(b) N. 229.

triangle, auquel ce même arc seroit aussi opposé, est obtus [H]. Or, un même arc ne peut être en même temps moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, un arc BD qui étant tiré du sommet de l'angle B, passera dans le triangle ABC, ne sera point perpendiculaire au côté AC; & par conséquent, si un arc qui est tiré du sommet de cet angle est perpendiculaire à ce côté, il passe hors de ce triangle. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION VIII. Théorème:

231. Si dans un triangle-Sphérique rectangle, l'un des côtés est le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse le sera aussi.

* Fig. 96. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, le côté AB est le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC le sera aussi.

Démonstr. L'arc AB est perpendiculaire à l'arc AC, puisque [H] l'angle A est droit. Ainsi, puisque [H] cet arc AB est le quart de la circonférence d'un cercle, son extrémité B est l'un des Pôles de l'arc AC (a); & par conséquent, puisque l'hypoténuse BC est un arc d'un grand cercle, qui est compris entre cette extrémité B & ce même arc AC, cette hypoténuse est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (b).
 (a) N. 192. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE:

232. Il suit de ce théorème, que si dans un triangle-Sphérique rectangle, l'un des angles adjacents

adjacents à l'hypoténuse est droit, cette hypoténuse sera le quart de la circonférence d'un cercle.

Si dans le triangle Sphérique ABC^* qui est Fig. 36a rectangle en A , l'angle C est droit; l'hypoténuse BC sera le quart de la circonférence d'un cercle:

Démonstr. Puisque $[H]$ l'angle C est droit, le côté AB qui est opposé à cet angle, est le quart de la circonférence d'un cercle (a) ; & par (a) N. 227. conséquent, l'hypoténuse BC est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (b) . Donc, (b) N. 228. $G, Q, F, D.$

PROPOSITION IX. Théorème.

233. Dans un triangle Sphérique rectangle, l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque chaque côté est moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle; & plus que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque l'un des côtés est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus.

Premièrement.

234. Si dans le triangle Sphérique ABC^* Fig. 37a qui est rectangle en A , chaque côté AB & AC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; l'hypoténuse BC le sera aussi.

Constr. Du sommet de l'angle B abaissez, au plan du côté AC , la perpendiculaire BE (c) (d) (e) (f) (g) (h) & prolongez ce côté vers D , jusqu'à ce que l'arc AD soit le quart de la circonférence d'un cercle. Du point E auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan, tirez aux points C & D ,
F f

les lignes droites EC & ED; & du point B aux mêmes points C & D, les lignes droites BC & BD. Enfin, du même point précédent E, tirez une ligne droite EF qui passe par le centre G de l'arc AD; & supposez qu'un arc BID d'un grand cercle passe par les points B & D.

Démonstr. Les triangles BEC & BED sont rectangles l'un & l'autre en E; puisque la ligne BE qui est perpendiculaire [c] au plan des lignes EC & ED, l'est aussi (a) à chacune de ces lignes, avec lesquelles elle a le point E de commun: le côté BE leur est commun: & le côté EC du premier, est moins grand que le côté ED du second (b); puisque ce côté EC est plus éloigné que le côté ED, de la ligne EF qui [c] passe par le centre G du cercle ACF. Donc (c), l'hypoténuse BC du triangle BEC, est moins grande que l'hypoténuse BD du triangle BED; & par conséquent, puisque ces hypoténuses sont [e] les cordes des arcs BHC & BID, l'arc BHC est moins grand que l'arc BID (d). Mais, l'arc BID est le quart de la circonférence d'un cercle (e); puisque [c] le côté AD du triangle Sphérique rectangle ABD dont cet arc est l'hypoténuse, est le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, l'arc BHC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, puisque ce dernier arc est l'hypoténuse du triangle Sphérique ABC, l'hypoténuse de ce triangle est moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

(a) E. l. 11.
d. 6.

(b) E. l. 1.
P. 7.

(c) E. l. 1.
P. 47.

(d) E. l. 1.
P. 15.
(e) N. 33.

Secondement.

235. Si dans le triangle-Sphérique ABC* Fig. 24 qui est rectangle en A, chaque côté AB & AC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

Constr. Prolongez les côtés AB & AC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point D.

Démonstr. Le triangle-Sphérique DBC est rectangle en D; puisque (a) les angles A & D (a) N. 197. qui [c] sont des angles opposés, sont égaux, & que [H] l'angle A est droit: & les côtés DB & DC sont chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle; puisque [H] chaque côté AB & AC du triangle ABC, dont ces premiers côtés sont les supplémens (b), est plus (b) N. 6. 2 que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, l'hypoténuse BC de ce premier triangle est moins que le quart de la circonférence d'un cercle (c); & par conséquent, puisque cette (c) N. 124 même hypoténuse est aussi celle du triangle ABC, l'hypoténuse du triangle ABC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

Troisièmement.

236. Enfin, si dans le triangle-Sphérique ABC* Fig. 25 qui est rectangle en A, les côtés AC & AB sont, l'un plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins, (par exemple le côté AC plus, & le côté AB moins,) l'hypoténuse BC sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Constr. Du sommet de l'angle B abaissez
 (A) E. I. II. au plan du côté AC, la perpendiculaire BE (a) ;
 P. II. & prenez sur ce côté un arc AD égal au quart
 de la circonférence d'un cercle. Du point E
 auquel cette perpendiculaire rencontre ce plan ;
 tirez aux points D & C, les lignes droites ED
 & EC ; & du point B aux mêmes points D & C,
 les lignes droites BD & BC. Enfin, du même
 point précédent E, tirez une ligne droite EF
 qui passe par le centre G de l'arc AC ; & sup-
 posez qu'un arc BID d'un grand cercle, passe
 par les points B & D.

Démonstr. Les triangles BEC & BED sont
 rectangles l'un & l'autre en E ; puisque la ligne
 BE qui est perpendiculaire [c] au plan des li-
 (B) E. I. II. gnes EC & ED, l'est aussi (b) à chacune de ces
 B. 2. lignes, avec lesquelles elle a le point E de com-
 mun : le côté BE leur est commun : & le côté
 EC du premier, est plus grand que le côté ED
 (C) E. I. 3. du second (c) ; puisque ce côté EC est plus près
 P. 7. que le côté ED, de la ligne EF qui [c] passe
 (d) E. I. 1. par le centre G du cercle ACF. Donc (d), l'hy-
 P. 47. poténuse BC du triangle BEC, est plus grande
 que l'hypoténuse BD du triangle BED ; &
 par conséquent, puisque ces hypoténuses
 sont [c] les cordes des arcs BHC & BID, l'arc
 (e) E. I. 3. BHC est plus grand que l'arc BID (e). Mais,
 P. 15. l'arc BID est le quart de la circonférence d'un
 (f) N. 231. cercle (f) ; puisque [c] le côté AD du triangle-
 Sphérique rectangle ABD dont cet arc est l'hy-
 poténuse, est le quart de la circonférence d'un

cercle. Donc, l'arc BHC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent, puisque ce dernier arc est l'hypoténuse du triangle-Sphérique ABC, l'hypoténuse de ce triangle est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

237. IL suit de ce théorème, que dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque côté est moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; Et l'un des côtés est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, Et l'autre plus, lorsque l'hypoténuse est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Premièrement.

238. SI dans le triangle-Sphérique ABC * * Fig. 94. qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, chaque côté AB & AC sera moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Si les côtés AB & AC étoient, l'un ou l'autre, ou chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC le seroit aussi (a) : & si ces mêmes côtés étoient, l'un (a) N. 231. moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus, cette même hypoténuse seroit plus que le quart de la circonférence d'un cercle (b). Or, l'hypoténuse BC n'est ni le quart (b) N. 233. de la circonférence d'un cercle, ni plus que le

quart de la circonférence d'un cercle; puisqu'elle est moins que ce quart [H]. Donc, les côtés AB & AC ne sont ni l'un ou l'autre, ni chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, ni l'un moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus; & par conséquent, ils sont chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ou chacun plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Secondement.

* Fig. 95. 239. Si dans un triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, les côtés AB & AC seront, l'un plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins.

Démonstr. Si les côtés AB & AC étoient, l'un ou l'autre, ou chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC le feroit aussi (a): & si ces mêmes côtés étoient chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ou chacun plus, cette même hypoténuse feroit moins que le quart de la circonférence d'un cercle (b). Or, l'hypoténuse BC n'est ni le quart de la circonférence d'un cercle, ni moins que le quart de la circonférence d'un cercle; puisqu'elle est plus que ce quart [H]. Donc, les côtés AB & AC ne sont ni l'un ou l'autre, ni chacun, le quart de la circonférence d'un cercle, ni chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ni chacun plus; &

par conséquent, l'un est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre moins.

Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

240. Il suit de ce théorème, que dans un triangle-Sphérique rectangle, l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque chaque angle qui lui est adjacent est ou aigu, ou obtus; & plus que le quart de la circonférence d'un cercle, lorsque l'un de ces angles est aigu, & l'autre obtus.

Premièrement.

Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est * Fig. 94. rectangle en A, chaque angle B & C adjacent à l'hypoténuse BC est ou aigu, ou obtus, cette hypoténuse sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Dans un triangle-Sphérique rectangle, les côtés sont de même espèce que les angles auxquels ils sont opposés (a). Ainsi, si (a) N. 226. dans le triangle-Sphérique ABC, chaque angle B & C est aigu [H], chaque côté AC & AB adjacent à l'hypoténuse BC, sera moins que le quart de la circonférence d'un cercle: & si chacun de ces angles est obtus [H], chacun de ces côtés sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle. Or, dans l'un & dans l'autre de ces cas, l'hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle (b); & par consé- (b) N. 233. quent, C. Q. F. D.

Secondement.

* Fig. 93. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'un des angles B & C adjacents à l'hypoténuse BC est aigu, & l'autre obtus, cette hypoténuse sera plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Démonstr. Dans un triangle-Sphérique rectangle, les côtés sont de même espèce que les angles auxquels ils sont opposés (a). Ainsi, puisque [H] dans le triangle-Sphérique ABC, l'un des angles B & C est aigu, & l'autre obtus, l'un des côtés AC & AB adjacents à l'hypoténuse BC, est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus; & par conséquent, cette hypoténuse est plus que le quart de la circonférence d'un cercle (b). Donec C. Q. F. D.

COROLLAIRE III.

241. Il suit encore de ce théorème, que dans un triangle-Sphérique rectangle, chaque angle adjacent à l'hypoténuse est ou aigu, ou obtus; lorsque cette hypoténuse est moins que le quart de la circonférence d'un cercle; & l'un de ces angles est aigu, & l'autre obtus, lorsque cette hypoténuse est plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

Premièrement.

* Fig. 94. Si dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, chaque

que angle B & C adjacent à cette hypoténuse est ou aigu, ou obtus.

Démonstr. Puisque [H] l'hypoténuse BC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, chaque côté AB & AC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ou plus que le quart de la circonférence d'un cercle (a); & par conséquent, puisque (b) les angles adjacents à l'hypoténuse sont de même espèce que les côtés auxquels ils sont opposés, chaque angle C & B est ou aigu, ou obtus.

Secondement.

Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des angles B & C adjacents à cette hypoténuse sera aigu, & l'autre obtus. * Fig. 95.

Démonstr. Puisque [H] l'hypoténuse BC est plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des côtés AB & AC est moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus (c); & par conséquent, puisque (d) les angles adjacents à l'hypoténuse sont de même espèce que les côtés auxquels ils sont opposés, l'un des angles B & C est aigu, & l'autre obtus. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE IV.

242. IL suit enfin de ce théorème, que si dans un triangle-Sphérique rectangle, l'hypoténuse est le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des côtés le sera aussi.

• Fig. 96. Si dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC est le quart de la circonférence d'un cercle, l'un des côtés AB & AC le sera aussi.

Démonstr. Si chaque côté AB & AC étoit ou moins, ou plus, que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse BC seroit moins que le quart de la circonférence d'un cercle (a): & si l'un de ces côtés étoit moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus, cette hypoténuse seroit plus que le quart de la circonférence d'un cercle (b). Or, l'hypoténuse BC n'est dans aucun de ces cas, puisqu'elle est le quart de la circonférence d'un cercle [H]. Donc, les côtés AB & AC ne sont, ni tous les deux moins que le quart de la circonférence d'un cercle, ni tous les deux plus, ni l'un de ces côtés n'est point moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre plus, & par conséquent, ils sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle, ou l'un est le quart, & l'autre ou plus, ou moins, que le quart de la circonférence d'un cercle. Donc, C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

De la Projection.

DEFINITIONS.

143. **S** I l'on regarde de fort loin un objet Y* * Fig. 97.
 placé vis-à-vis d'une surface quelconque X, les points B, C, D, &c. de cet objet, semblent être les points *b*, *c*, *d*, &c. de cette surface, auxquels vont se terminer les lignes droites A*Bb*, A*Cc*, A*Dd*, &c. qui sont tirées de l'œil A du Spectateur par ces points B, C, D, &c. & par conséquent, cet objet paroît être tracé sur cette surface. Or, la figure, ou plutôt l'apparence d'un objet, ainsi déterminée sur une surface quelconque, par la rencontre de cette surface & des lignes droites qui sont tirées de l'œil du Spectateur par chaque point de cet objet, s'appelle la *Projection naturelle* de ce même objet. Et cette surface sur laquelle cette apparence est tracée, se nomme la *surface de Projection* : ou le *plan de Projection*, si elle est une surface plane.

144. Mais, comme toutes les dimensions d'un objet sont ordinairement changées dans la projection, par cette manière de la tracer, qui supposant l'œil du Spectateur immobile, fait également dépendre la grandeur de ces dimensions, & de celle de l'objet, & de la dis-

tance du même objet au plan de projection, on s'en sert seulement dans la Perspective. Et lorsqu'il s'agit de Géométrie, on considère l'œil du Spectateur comme étant mobile; afin qu'en le supposant toujours placé directement vis-à-vis du point dont on cherche la projection, celle de l'objet entier ne soit déterminée que par des perpendiculaires abaissées de chaque point de cet objet à son plan de projection; & que par-là, la distance de ce même objet à ce plan soit absolument indifférente à la grandeur de ses dimensions dans sa projection. Or, l'apparence d'un objet quelconque ainsi déterminée sur un plan, par des perpendiculaires abaissées de chaque point de cet objet à ce plan, se nomme la *Projection Géométrale*, ou *Orthographique* de ce même objet.

COROLLAIRE I.

245. IL suit de cette dernière-définition, que si un plan quelconque est perpendiculaire à un autre, la commune section de ces plans sera leur projection.

• Fig. 98. La commune section AB* des plans X & Y dont le premier est perpendiculaire à l'autre, est la Projection du plan X sur le plan Y.

Démonstr. Puisque le plan X est perpendiculaire [H] au plan Y, toute perpendiculaire abaissée d'un point quelconque du plan X au plan Y, passe par la commune sec-

a) E. l. 11. tion AB de ces plans (a). Ainsi, chaque point du plan X semble être un point de cette com-

une section; & par conséquent, cette commune section est l'apparence du plan X déterminée sur le plan Y, par des perpendiculaires abaissées de chaque point de ce premier plan au dernier. Or, puisque cette commune section est l'apparence du plan X ainsi déterminée sur le plan Y, elle est la projection du premier de ces plans sur le dernier (a); & par conséquent, (a) N. 244. C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

246. IL suit aussi de cette même définition, que si un arc de cercle quelconque, (qui n'est cependant pas plus grand que le quart de la circonférence de ce cercle,) est vu parallèlement au rayon qui le termine par l'une de ses extrémités, sa projection sera son sinus.

La projection DC* de l'arc de cercle AB, * Fig. 99. vu parallèlement au rayon BC qui le termine par son extrémité B, est le sinus de cet arc.

Constr. De l'extrémité A de l'arc AB abaissés au rayon BC, la perpendiculaire AE (b). (b) E. 1. 1.

Démonstr. Puisque (c) la projection de l'arc AB doit être déterminée par des perpendiculaires abaissées de chaque point de cet arc à son plan de projection X, & que [H] ces perpendiculaires doivent être parallèles au rayon BC qui termine ce même arc par son extrémité B, ce rayon BC est perpendiculaire à ce plan X (d). Mais, ce même rayon est dans le plan de l'arc AB. Donc, le plan de cet arc est aussi perpendiculaire à ce même

- (a) E. I. 11. plan X (a). Ainsi (b), la commune section de ces deux plans est la projection du premier; & par conséquent la partie de cette commune section, qui est comprise entre les perpendiculaires AD & BC qui lui sont abaissées des extrémités A & B de cet arc AB, est la projection de cet arc. Or, cette partie de cette commune section est aussi le sinus de ce même arc. Car, si cet arc est éloigné de son plan de projection X, cette partie est une ligne droite DC égale (c) à la perpendiculaire AE qui est ce sinus (d): & si ce même arc est posé immédiatement sur son plan de projection, cette partie est cette perpendiculaire même AE. Donc, la projection de l'arc AB est le sinus du même arc AB; & par conséquent, C. Q. F. D.
- (c) E. I. 11. DC égale (c) à la perpendiculaire AE qui est ce sinus (d): & si ce même arc est posé immédiatement sur son plan de projection, cette partie est cette perpendiculaire même AE. Donc, la projection de l'arc AB est le sinus du même arc AB; & par conséquent, C. Q. F. D.
- (d) N. 7.

COROLLAIRE III.

247. IL suit enfin de cette même définition, que si un cercle est incliné à un plan quelconque, la projection de ce cercle sur ce plan sera une Ellipse †, qui aura pour petit axe le double du sinus du complément de l'inclinaison de ce cercle à ce plan; & pour grand axe, le diamètre de ce même cercle.

- * Fig. 100. La projection AGHD * du demi-cercle ABCD qui est incliné à son plan de projection X, est une demi-Ellipse, dont la moitié FH

† L'Ellipse est une figure plane terminée par une seule ligne RIME *; & dont les ordonnées, c'est-à-dire, les perpendiculaires LM, NO, PQ, &c. à l'un des axes IK, sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes CD, EF, GH, &c. d'un cercle ADB, dont le diamètre est égal à ce même axe.)

du petit axe est le sinus du complément de l'inclinaison de ce demi-cercle à ce plan ; & dont le grand axe est le diamètre AD de ce même demi-cercle.

Constr. Elevez au diamètre AD (a) les per- (a) E. l. 1.
pendiculaires FC & EB, qui soient chacune dans P. 11.
le plan du demi-cercle ABCD ; & passent, l'une par son centre F, & l'autre par tel point E de ce diamètre que l'on voudra. Des mêmes points F & E, élevez au même diamètre AD, les perpendiculaires FH & EG (b), qui soient chacune (b) E. l. 2.
dans le plan X. Enfin, des points C & B auxquels les perpendiculaires FC & EB rencontrent la circonférence de ce même demi-cercle, abaissez aux perpendiculaires précédentes FH & EG, les perpendiculaires CH & BG (c). (c) E. l. 2.

Démonstr. Premièrement, la projection d'un P. 11.
objet quelconque sur un plan, doit être déterminée (d) par des perpendiculaires abaissées (d) N. 244.
de chaque point de cet objet à ce plan. Ainsi, puisque les lignes CH & BG sont des perpendiculaires abaissées des points C & B de la circonférence du demi-cercle ABCD au plan X (e), la circonférence de la projection AGHD de ce demi-cercle sur ce plan, doit (e) E. l. 2.
passer par les points H & G auxquels ces perpendiculaires CH & BG rencontrent ce même plan ; & par conséquent, les perpendiculaires FH & EG au diamètre AD de cette projection, sont des ordonnées de cette même projection. Or, ces ordonnées sont proportionnelles aux

ordonnées FC & EB du demi-cercle ABCD qui leur correspondent. Car, puisqu'elles sont perpendiculaires chacune [c] à une même ligne AD, elles sont parallèles entr'elles (a) : & par une raison pareille, les ordonnées FC & EB du demi-cercle ABCD le sont aussi. Ainsi, dans les triangles FCH & EBG qui sont rectangles l'un en H & l'autre en G [c], les angles CFH & BEG sont égaux (b). Donc (c), ces triangles sont équiangles; & par conséquent (d), $FH : EG :: FC : EB$. Mais, cette même démonstration subsiste, à quelque endroit du diamètre AD que l'on prenne le point E. Donc, toutes les ordonnées de la projection AGHD du demi-cercle ABCD, sont proportionnelles à celles de ce même demi-cercle qui leur correspondent; & par conséquent, cette projection est une demi-Ellipse.

Secondement, les lignes FC & FH sont [c] des perpendiculaires à la commune section AD des plans du demi-cercle ABCD & de la projection AGHD de ce demi-cercle, tirées d'un même point F de cette commune section, l'une dans l'un de ces plans, & l'autre dans l'autre. Ainsi (e), l'angle CFH formé par ces lignes, est l'inclinaison du demi-cercle ABCD à son plan de projection X. Or (f), l'angle FCH est le complément de cet angle CFH; puisque [c] le triangle FHC est rectangle en H : & (g) la moitié FH du petit axe de la projection AGHD de ce demi-cercle, est le sinus de cet angle FCH; puisqu'elle est [c] une perpendiculaire abaissée de

de l'extrémité F de l'arc FI qui est la mesure de cet angle FCH, au rayon CI qui termine ce même arc par son autre extrémité I. Donc, la moitié FH du petit axe de la projection AGHD du demi-cercle ABCD; est le sinus du complément de l'inclinaison de ce demi-cercle à son plan de projection X; & par conséquent, si un cercle est incliné à un plan quelconque, sa projection sur ce plan sera toujours une Ellipse, qui aura pour petit axe le &c. & pour grand axe le &c.

PROBLÈME I.

248. Tracer la projection d'un cercle dont on connoit le diamètre, avec l'inclinaison au plan de projection.

On donne le diamètre AB* du cercle ADB, *Fig. 101: de 100 parties égales; avec l'inclinaison de ce cercle à son plan de projection, de 42 deg. 28 min. & il faut tracer la projection de ce même cercle.

Solution. Divisez en un grand nombre de parties CE, EG, &c. prises à volonté, le rayon CA du cercle proposé. Des points C, E, G, &c. auxquels ces parties se terminent, elevez à ce même rayon (a) les perpendiculaires CD, EF, GH, &c. Tirez deux lignes droites IK & RM, qui se coupent perpendiculairement (b). Prenez sur l'une de ces lignes, les parties LI & LK égales chacune au même rayon CA; & sur l'autre, les parties LM & LR égales chacune à la moitié du petit axe de la projection demandée;

242 TRAITE' COMPLET

(a) N. 111. que vous trouverez (a) de la manière suivante. †

Logarithme du sinus du complément de l'inclinaison
du cercle ADB, donnée de 42 deg. 28 m. - 9.8678623

Logarithme de la moitié du diamètre du même demi-
cercle, donné de 100 parties - - - - - 1.6989700

Logarithme de la moitié du petit axe demandé - 21.5668323

(b) N. 100. qui (b) donnera 36²⁷/₁₀₀ de ces parties égales, pour la valeur de cette moitié.

Prenez ensuite sur la ligne IK, les parties LN & La égales chacune à la partie CE du rayon CA; les parties NP & ab, égales chacune à la partie EG; & ainsi de suite. Par les points N, P, &c. a, b, &c. auxquels ces parties se terminent, tirez (c) à la perpendiculaire RM; les parallèles SO, TQ, &c. VX, YZ, &c. que vous déterminerez, en faisant (d) les parties NO & NS, aV & aX égales chacune à une quatrième proportionnelle aux lignes CD, LM & EF; les parties PQ & PT, bZ & bY, égales chacune à une quatrième proportionnelle aux lignes CD, LM & GH; & ainsi de suite. Enfin, tracez une ligne qui passe par les points R, S, T, I, Q, O, M, X, Z, K, &c. & la figure RIMK terminée par cette ligne, sera la projection demandée.

† Le rayon d'un cercle qui est mis en projection, peut toujours former avec la moitié du petit axe de cette projection, & la perpendiculaire qui est abaissée de l'extrémité de ce même rayon à celle de ce petit axe, un triangle-rectangle dont il est l'hypoténuse. Voyez la Figure 399.

Démonstr. Dans la figure RIMK, le grand axe IK est égal [c] au diamètre AB du cercle ADB; & les ordonnées NO, PQ, &c. sont proportionnelles [c] aux ordonnées EF, GH, &c. du même cercle, qui leur correspondent. Ainsi, (a), cette figure est une Ellipse. Or [c], (a) N. 247. cette Ellipse a pour petit axe RM, le double du sinus du complément de l'inclinaison de ce cercle ADB à son plan de projection; & l'on vient de dire que son grand axe IK est égal au diamètre AB de ce même cercle. Donc (b), (b) N. 247. elle est la projection de ce cercle; & par conséquent, C. Q. F. F.

PROBLESME II.

249. *Connoissant les deux axes d'une Ellipse qui est la projection d'un cercle, trouver l'inclinaison de ce cercle au plan de projection.*

On donne le grand axe IK * de l'Ellipse * Fig. 101. RIMK qui est la projection d'un cercle, de 100 parties égales; avec le petit axe RM de cette même Ellipse, de 73 $\frac{1}{2}$ de ces mêmes parties: & il faut trouver l'inclinaison de ce cercle à son plan de projection.

Solution. Le rayon d'un cercle qui est mis en projection, est toujours égal (c) à la moitié du (c) N. 247. grand axe de la projection de ce cercle; & peut toujours former avec la moitié du petit axe de la même projection & la perpendiculaire qui est abaissée de l'extrémité de ce

344 TRAITE' COMPLET

même rayon à celle de ce petit axe, un triangle - rectangle dont il est l'hypoténuse †

(a) N. 127. Ainsi (a) :

Complément du logarithme de la moitié du grand	
axe IK donné de 100 parties	8.3910300
Logarithme de la moitié du petit axe RM donné	
de 73 ³⁷ / ₅₀	1.5668323

Logarithme du sinus du complément de l'inclinaison	
demandée	9.8678623

(b) N. 103. qui (b) donnera 47 deg. 32 m. pour ce complément ; & par conséquent, 42 deg. 28 m. pour l'inclinaison demandée.

Donc, C. Q. F. D.

† Voyez la Figure 100.

SECTION SECONDE.

Des Principes particuliers, des Problèmes, & des Usages de la Trigonométrie- Sphérique.

CHAPITRE PREMIER.

Des Principes particuliers de la Trigonométrie- Sphérique.

PROPOSITION I. Théorème.

250. **D**ANS un triangle Sphérique quelconque, les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus des angles qui sont opposés à ces côtés.

* Fig. 102.

* 103.

Dans le triangle-Sphérique ABC *, le sinus du côté AB est au sinus du côté BC, comme

DE TRIGONOMETRIE. 249

le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A : le sinus du côté AC est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A : enfin, le sinus du côté AB est au sinus du côté AC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B.

Le triangle ABC est rectangle, ou n'est point rectangle.

PREMIER CAS,

251. Lorsque le triangle ABC * est rectangle * Fig. 102, en A.

Constr. Supposant le triangle ABC décrit sur la surface de la Sphère, tracez (a) la projection (a) N. 248, DEF, sur celui des grands cercles de cette Sphère auquel le rayon TC, la commune section des secteurs ATC & BTC qui forment l'angle C, est perpendiculaire. Prolongez ensuite les côtés FD & FE de cette projection, jusqu'à ce qu'ils rencontrent en des points G & O, H & S, la circonférence GPOQ de ce cercle. Par le point E qui est commun aux côtés FE & DE, tirez (b) la parallèle RK au dia- (b) E. 1. 1, mètre GO. Tirez aussi (c) le diamètre PQ per- (c) E. 1. 1. P. 31. P. 11. pendiculaire au même diamètre GO. Prolon- (d) N. 248. gez (d) le côté DE, jusqu'à ce qu'il rencontre en des points P & Q la même circonférence GPOQ. Enfin, des points E, H & K abaissez au diamètre GO (e), les perpendiculaires (e) E. 1. 1, P. 12. EN, HI & KM.

Démonstr. Premièrement, les lignes FD & RE qui [c] sont chacune perpendiculaires au diamètre PQ, sont les ordonnées de la

de mi-Ellipse PDQ, qui correspondent aux ordonnées FG & RK du demi-cercle PGO.

(*) N. 247. Ainsi (a), l'arc DE de cette demi-Ellipse est la projection de l'arc GK de ce demi-cercle. Or, ce même arc DE est aussi [c] la projection de l'arc AB. Donc, l'arc GK est égal

(b) N. 7, à l'arc AB ; & par conséquent, puisque (b) la ligne KM qui [c] est perpendiculaire au diamètre GO, est le sinus de l'arc GK ; & que la ligne EN qui [c] est aussi perpendiculaire au même diamètre GO, est égale à la ligne

(c) E. I. 1. KM (c), la ligne EN est le sinus de l'arc AB, P. 34.

Secondement, le rayon TC qui termine l'arc BC par son extrémité C, est perpendiculaire au plan de projection GPOQ [c]. Ainsi, la ligne EF qui [c] est la projection de cet arc sur

(d) N. 246, ce plan, est le sinus de ce même arc (d).

Troisièmement, les lignes FH & FG sont tirées d'un même point de la commune section TC des sections ATC & BTC qui forment l'angle C ; puisque cette commune section étant un rayon de la Sphère dont le cercle GPOQ

(e) N. 184, est un grand cercle [c], elle passe (e) par le centre F de cette Sphère, duquel ces lignes sont

tirées : elles sont perpendiculaires à cette commune section (f) ; puisque cette commune section avec laquelle elles ont le point F de commun,

(f) E. I. II. 4. 2.

est perpendiculaire [c] au plan GPOQ dans lequel elles sont tirées : & elles sont, l'une dans le plan du secteur BTC, & l'autre dans le plan du secteur ATC ; puisque les plans de ces

secteurs, & par conséquent les cercles dont ces secteurs sont des parties, étant perpendiculaires (a) au plan de projection GPOQ, les lignes (a) E. 1. 11. HS & GO qui [c] sont les projections de ces P. 18. cercles sur ce plan, sont aussi (b) les communes sections de ces mêmes cercles & de ce même plan. (b) N. 245. Ainsi (c), l'angle GFH qui est formé par ces (c) E. 1. 11. lignes, est l'inclinaison des plans de ces secteurs. d. 5. Donc (d), il est égal à l'angle C; & par consé- (d) N. 194. quent, puisque (e) la ligne HI qui [c] est per- (e) N. 7. pendiculaire au diamètre GO, est le sinus de l'angle GFH, elle est aussi celui de l'angle C.

Quatrièmement, la ligne HF est le sinus du quart de la circonférence du cercle GPOQ (f); (f) N. 8. puisqu'elle est un rayon de ce cercle [c]. Or, l'angle A a pour mesure le quart de la circonférence de ce même cercle; puisque cet angle est droit [H]. Donc, la ligne HF est le sinus de l'angle A.

Cinquièmement enfin, les triangles NEF & IHF sont équiangles (g); puisqu'ils sont rec- (g) E. 1. 1. tangles, l'un en N & l'autre en I [c], & que l'an- P. 32. gle F leur est commun. Ainsi (h), EN : EF :: (h) E. 1. 6. HI : HF. Or, EN est le sinus du côté AB [D 1.] : P. 4. EF est le sinus du côté BC [D 2.] : HI est le sinus de l'angle C [D 3.] : & HF est le sinus de l'angle A [D 4.]. Donc, &c.

Si l'on trace ensuite la projection du même triangle ABC, sur celui des grands cercles de la même Sphère auquel la commune section TB des secteurs ATB & BTC qui forment

l'angle B, est perpendiculaire; on démontrera de la même manière dont on vient de démontrer la proportion précédente, que le sinus du côté AC est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A.

ENFIN, si l'on échange chacune des deux proportions précédentes, on aura (a) ces deux nouvelles proportions: le sinus du côté AB est au sinus de l'angle C, comme le sinus du côté BC est au sinus de l'angle A: & le sinus du côté AC est au sinus de l'angle B; comme le sinus du côté BC est au sinus de l'angle A.

(a) E. 1. 5. Dont on conclura (b), que le sinus du côté AB est au sinus de l'angle C, comme le sinus du côté AC est au sinus de l'angle B; & par conséquent (c), que le sinus du côté AB est au sinus du côté AC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B. Donc, C. Q. F. D.

SECOND CAS.

* Fig. 103. 252. Lorsque le triangle ABC * n'est point rectangle.

Constr. Supposez qu'un secteur BED d'un grand cercle perpendiculaire au plan de l'arc AC, (c'est-à-dire, au secteur AEC prolongé s'il est nécessaire,) passe par le sommet de l'angle B qui est opposé à cet arc.

Démonstr. Le triangle ABD est rectangle en D [c]. Ainsi (d), le sinus de l'angle D, (c'est-à-dire (e) le sinus total,) est au sinus de l'angle A, comme le sinus du côté AB est au sinus du côté BD; & par conséquent (f), le rectangle

le fait du sinus total & du sinus du côté BD, est égal au rectangle fait du sinus de l'angle A & du sinus du côté AB. Mais, le même rectangle fait du sinus total & du sinus du côté BD, est aussi égal (a) au rectangle fait du sinus de l'angle C & du sinus du côté BC; puisque le triangle DBC étant aussi rectangle en D [c], le sinus de l'angle D, (c'est-à-dire (b) le sinus total), est au sinus de l'angle C, comme le sinus du côté BC est au sinus du côté BD (c). (c) N. 151. Donc, le rectangle fait du sinus de l'angle A & du sinus du côté AB, est égal au rectangle fait du sinus de l'angle C & du sinus du côté BC; & par conséquent (d), le sinus du côté AB est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle A.

Si l'on suppose ensuite qu'un autre secteur de grand cercle perpendiculaire au plan du côté AB, passe par le sommet de l'angle C qui est opposé à ce côté, on démontrera de la même manière dont on vient de démontrer la proportion précédente, que le sinus du côté AC est au sinus du côté BC, comme le sinus de l'angle B est au sinus de l'angle A.

ENFIN, si l'on suppose qu'un troisième secteur de grand cercle perpendiculaire au plan du côté BC, passe par le sommet de l'angle A qui est opposé à ce côté, on démontrera de la même manière dont on vient de le faire à l'égard des côtés & des angles précédents, que le sinus du côté AB est au sinus du côté AC, comme le

* Fig. 102. sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B. Donc
 * 103. dans un triangle-Sphérique quelconque ABC
 les sinus des côtés sont proportionnels aux sinus
 des angles qui sont opposés à ces côtés ; & par
 conséquent, C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

253. Il suit de ce théorème, que si dans un
 triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle
 qui passe par le sommet de l'un des angles, est
 perpendiculaire au côté qui est opposé à cet
 angle, les sinus des angles au sommet + seront
 proportionnels aux sinus des compléments des
 angles sur la base.

* Fig. 104. Si dans le triangle-Sphérique ABC *, un
 arc BD d'un grand cercle qui passe par le
 sommet de l'angle B, est perpendiculaire au
 côté AC, le sinus de l'angle ABD sera au sinus
 de l'angle CBD, comme le sinus du complément
 de l'angle BAC est au sinus du complément de
 l'angle BCA.

¶ Lorsqu'un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des
 angles d'un triangle-Sphérique quelconque, est perpendiculaire
 au côté de ce même triangle qui est opposé à cet angle,
 l'angle par le sommet duquel ce cercle passe, s'appelle l'Angle-
 vertical : le côté qui est opposé à cet angle, se nomme la Base ;
 les deux autres côtés s'appellent les Côtés : les deux autres angles
 s'appellent les Angles sur la base : les parties de la base comprises
 entre le cercle perpendiculaire & les angles sur la base, se
 nomment les Segments de la base : enfin, les angles formés par
 le même cercle perpendiculaire & par les côtés, s'appellent les
 Angles au sommet.

* Fig. 104. Ainsi dans le triangle ABC *, l'angle ABC est l'angle vertical :
 le côté AC est la base : les côtés BA & BC sont les côtés : les
 angles BAC & BCA sont les angles sur la base : les parties AD
 & CD du côté AC, sont les segments de la base : & les angles
 ABD & CBD sont les angles au sommet.

Constr. Prolongez vers les points H & I, les côtés AB & AC de l'angle BAC; jusqu'à ce que les arcs AH & AI soient chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Prolongez de même, vers les points E & F, les côtés CB & CA de l'angle BCA; jusqu'à ce que les arcs CE & CF soient aussi chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite que les arcs IHG & FEG de deux grands cercles, passent, l'un par les points I & H, & l'autre par les points F & E. Enfin, prolongez vers G l'arc perpendiculaire BD, jusqu'à ce qu'il rencontre les arcs IHG & FEG.

Démonstr. L'arc IH est la mesure de l'angle BAC (a); puisque [c] les arcs AH & AI sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle: & l'arc FE est celle de l'angle BCA (b); (b) N. 196. puisque [c] les arcs CE & CF sont aussi chacun le quart de la circonférence d'un cercle.

L'arc IHG est perpendiculaire à l'arc AI (c); puisque les arcs AH & AI étant, comme on vient de le dire, chacun le quart de la circonférence d'un cercle [c], le point A est l'un des Pôles de cet arc IHG (d). Or [H], l'arc DBG est aussi perpendiculaire au même arc AI. Donc, le point G auquel ces arcs IHG & DBG se rencontrent, est l'un des Pôles de cet arc AI (e). Ainsi, l'arc IHG est le quart de la circonférence d'un cercle (f). & par conséquent (g), l'arc IHG est le complément de l'arc IH; c'est-à-dire [d. n.], de l'angle BAC. (g) N. 20. f.

T. I. O. C. on G. A. I. j.

- Pareillement, l'arc FEG est perpendiculaire à l'arc CF (a); puisque les arcs CE & CF étant chacun le quart de la circonférence d'un cercle, le point C est l'un des Pôles de cet arc FEG (b). Or [H], l'arc DBG est aussi perpendiculaire au même arc CF. Donc, le même point précédent G auquel les arcs FEG & DBG se rencontrent, est aussi l'un des Pôles de l'arc CF (c). Ainsi, l'arc FEG est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (d); & par conséquent (e), l'arc EG est le complément de l'arc FE; c'est à-dire [D 1.], de l'angle BCA.
- 3^{ent} Enfin (f), le sinus de l'angle GHB est au sinus de l'arc BG, comme le sinus de l'angle GBH ou ABD (g), est au sinus du complément HG de l'angle BAC [D 2.]: & le sinus de l'angle GEB est au sinus du même arc BG, comme le sinus de l'angle GBE ou CBD (h), est au sinus du complément EG de l'angle BCA [D 2.]. Mais; le sinus de l'angle GHB est égal à celui de l'angle GEB; puisque le point A étant le Pôle de l'arc IHG, de même que le point C est celui de l'arc FEG [D 2.], ces angles sont droits l'un & l'autre (i). Donc (k), le sinus de l'angle ABD est au sinus du complément de l'angle BAC, comme le sinus de l'angle CBD est au sinus du complément de l'angle BCA; & par conséquent en échangeant (l), le sinus de l'angle ABD est au sinus de l'angle CBD, comme le sinus du complément de l'angle BAC est au sinus du complément de l'angle BCA. Donc, C. Q. F. D.
- (a) N. 189.
(b) N. 193.
(c) N. 191.
(d) N. 188.
(e) N. 20. f.
(f) N. 250.
(g) N. 199.
(h) N. 199.
(i) N. 189.
(k) E. l. 5.
P. 11.
(l) E. l. 5.
P. 16.

COROLLAIRE II.

254. IL suit de ce même théorème, que si dans un triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles, est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, les sinus des compléments des segments de la base seront proportionnels aux sinus des compléments des côtés.

Si dans un triangle-Sphérique ABC *, un* Fig. 104. arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B, est perpendiculaire au côté AC, le sinus du complément du segment AD sera au sinus du complément du segment CD, comme le sinus du complément du côté BA est au sinus du complément du côté BC.

Constr. La même que celle du corollaire précédent (a). (a) N. 253.

Demonstr. 1^{re} L'arc DI est le complément du segment AD (b); puisque [c] l'arc AI est le (b) N. 20. 1. quart de la circonférence d'un cercle. Or (c), (c) N. 196. le même arc DI est aussi la mesure de l'angle DGI ou BGH; puisque par la démonstration du corollaire précédent (d), le point G étant (d) N. 252. l'un des Pôles de l'arc AI; les arcs IHG & DBG sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (e). Donc, l'angle BGH est le complément du segment AD. (e) N. 188.

Pareillement, l'arc DF est le complément du segment CD (f); puisque [c] l'arc CF est (f) N. 20. 1. le quart de la circonférence d'un cercle. Or (g), le même arc DF est aussi la mesure de (g) N. 196.

- l'angle DGF ou BGE, puis par la démonstration du corollaire précédent (a), le point G étant aussi l'un des Pôles de l'arc CF, les arcs FEG & DBG sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle (b). Donc, l'angle BGE est le complément du segment CD.
- 2^{en} L'arc BH est le complément du côté BA (c); puisque [c] l'arc AH est le quart de la circonférence d'un cercle: & l'arc BE est le complément du côté BC (d); puisque [c] l'arc CE est aussi le quart de la circonférence d'un cercle.
- 3^{ent} Enfin (e), le sinus de l'angle GHB est au sinus de l'arc BG, comme le sinus du complément BGH du segment AD [D 12.] est au sinus du complément BH du côté BA [D 2.]: & le sinus de l'angle GEB est au sinus de l'arc BG, comme le sinus du complément BGE du segment CD [D 1.] est au sinus du complément BE du côté BC [D 2.]. Mais, on a démontré dans le corollaire précédent (f), que le sinus de l'angle GHB est égal à celui de l'angle GEB.
- Donc (g), le sinus du complément du segment AD est au sinus du complément du côté BA, comme le sinus du complément du segment CD est au sinus du complément du côté BC; & par conséquent en échangeant (h), le sinus du complément du segment AD est au sinus du complément du segment CD, comme le sinus du complément du côté BA est au sinus du complément du côté BC. Donc, C. Q. F. D.
- (a) N. 253.
(b) N. 188.
(c) N. 20. f.
(d) N. 20. f.
(e) N. 250.
(f) N. 253.
(g) E. I. 5. p. 11.
(h) E. I. 5. p. 16.

PROPOSITION II. Théorème.

255. Dans un triangle-Sphérique rectangle, le sinus total est au sinus de l'un quelconque des côtés qui forment l'angle droit, comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est à celle du côté opposé à cet angle.

Dans le triangle-Sphérique ABC * qui est * Fig. 105. rectangle en A, le sinus total est au sinus du côté AC, comme la tangente de l'angle C est à celle du côté AB: & le sinus total est au sinus du côté AB, comme la tangente de l'angle B est à celle du côté AC.

Constr. Supposant le triangle ABC décrit sur la surface de la Sphère, tracez (a) la projec- (a) N. 24. tion DEF, sur celui des grands cercles de cette Sphère auquel la commune section TC des sécateurs ATC & BTC qui forment l'angle C, est perpendiculaire. Prolongez de part & d'autre le côté FD de cette projection, jusqu'à ce qu'il rencontre en des points G & O la circonférence GPOQ de ce cercle. Des points G, D & F, élevez au diamètre GO les perpendiculaires GX, DI & PQ (b). Prolongez de part & d'autre (b) E. I. 1. le côté FE, jusqu'à ce qu'il rencontre en un P. 11. point S, la circonférence précédente; & en des points X & I, les perpendiculaires GX & DI. Par le point E commun aux côtés FE & DE, tirez (c) la parallèle RK au diamètre GO. Des (c) E. I. 2. points K & E, abaissez au même diamètre P. 31. GO (d) les perpendiculaires KM & EN. Du (d) E. I. 1. point F, tirez par le point K la ligne FV, qui P. 12.

rencontre en un point V la perpendiculaire $G\dot{X}$.
Enfin, prolongez de part & d'autre le côté

(a) N. 248. DE (a), jusqu'à ce qu'il rencontre en des points P & Q, le diamètre PQ.

Démonstr. Premièrement, la ligne GF est le

(b) N. 8. sinus total (b), puisqu'elle est [c] le rayon du cercle GPOQ : & la ligne DF est le sinus du côté AC, par une démonstration pareille à celle dont on s'est servi dans la proposition pré-

(c) N. 251. cédente (c), pour démontrer que la ligne EF est le sinus du côté BC.

Secondement, on démontre aussi de la même manière dont on l'a fait dans la proposition

(d) N. 251. précédente (d), que l'angle GFX est l'inclinaison des plans des secteurs ATC & BTC qui forment l'angle C. Ainsi, puisque la ligne GX qui [c] est perpendiculaire au diamètre GO,

(e) N. 38. est la tangente de cet angle GFX (e), elle est aussi celle de l'angle C.

(f) N. 247.† *Troisièmement*, $FG : RK :: FD : RE$ (f); puisque les lignes FG & RK qui [c] sont perpendiculaires chacune au diamètre PQ, sont les ordonnées du demi-cercle PGQ qui correspondent aux ordonnées FD & RE de la demi-

(g) E. 1. 1. Ellipse PDQ. Ainsi, puisque (g) FM est égale P. 34. à RK, & FN à RE, $FG : FM :: FD : FN$.

(h) E. 1. 6. Or (h), $FG : FM :: GV : MK$; puisque (i) les P. 4. triangles FGV & FMK qui [c] sont rectangles

(j) E. 1. 1. l'un en G & l'autre en M, & qui ont l'angle F P. 32.

(k) E. 1. 5. commun, sont équiangles. Donc (k), $FD : FN ::$

(l) E. 1. 6. $GV : MK$. Mais (l), $FD : FN :: DI : NE$; P. 4. puisque

puisque (a) les triangles FDI & FNE, qui [c] ^{(a) E. l. 2.}
sont rectangles l'un en D & l'autre en N, & qui ^{P. 32.}
ont l'angle F commun, sont aussi équiangles.
Donc (b), GV : MK :: DI : NE. Ainsi, puisque (c) ^{(b) E. l. 5.}
MK est égale à NE, GV est égale à DI (d); & ^{P. 11.}
par conséquent, puisque GV qui [c] est per- ^{(c) E. l. 2.}
pendiculaire au diamètre GO, est la tangente ^{(d) E. l. 5.}
de l'arc GK (e), & que par la même démon- ^{P. 14.}
stration que l'on a faite dans la proposition pré- ^{(e) N. 38.}
cédente (f), l'arc GK est égal à l'arc AB, la ^{(f) N. 25.}
ligne DI est la tangente de cet arc AB.

Quatrièmement enfin (g), les triangles GXF ^{(g) E. l. 2.}
& DIF sont équiangles; puisque [c] ils sont rec- ^{P. 32.}
tangles l'un en G & l'autre en D, & que l'an-
gle F leur est commun. Ainsi (h), GF : DF :: ^{(h) E. l. 6.}
GX : DI. Or, GF est le sinus total [D 1.]: DF est ^{P. 4.}
le sinus du côté AC [D 1.]: GX est la tangente
de l'angle C [D 2.]: & DI est celle du côté
AB [D 3.]. Donc, &c.

Si l'on trace ensuite la projection du même
triangle ABC, sur celui des grands cercles de
la même Sphère, auquel la commune section
TB des secteurs ATB ou BTC qui forment
l'angle B, est perpendiculaire, on démontrera
de la même manière dont on vient de démon-
trer la proportion précédente, que le sinus total
est au sinus du côté AB, comme la tangente
de l'angle B est à celle du côté AC. Ainsi, dans
le triangle-Sphérique rectangle ABC, le sinus
total est au sinus de l'un quelconque des côtés
qui forment l'angle droit A, comme la tangente

de l'angle adjacent à ce côté est à celle du côté qui est opposé à cet angle ; & par conséquent , C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

256. IL suit de ce théorème , que *si dans un triangle - Sphérique quelconque , un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles , est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle , les sinus des compléments des angles au sommet seront proportionnels aux tangentes des compléments des côtés.*

* Fig. 106. Si dans le triangle-Sphérique ABC * , un arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B , est perpendiculaire au côté AC , le sinus du complément de l'angle ABD sera au sinus du complément de l'angle CBD , comme la tangente du complément du côté BA est à celle du complément du côté BC.

Constr. Prolongez vers les points E & F , les côtés BA & BC du triangle ABC , jusqu'à ce que les arc BE & BF soient chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Supposez ensuite , que la circonférence d'un grand cercle passe par les points E & F. Enfin , prolongez de part & d'autre le côté AC , jusqu'à ce qu'il rencontre cette circonférence en des points G & H ; & prolongez aussi l'arc perpendiculaire BD , jusqu'à ce qu'il rencontre en un point I , cette même circonférence.

Démonstr. 1^{ent} le point B est l'un des Pôles de l'arc GIH (a) ; puisque [c] les arcs BE

& BF sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle. Ainsi (a), l'arc BDI est aussi le (a) N. 188. quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent (b), l'arc EI est la mesure de l'angle ABD; & l'arc IF est celle de l'angle CBD.

2^{ent} L'arc BDI est perpendiculaire à l'arc GIH (c); puisque l'on vient de démontrer que (c) N. 189. le point B est l'un des Pôles de ce dernier arc. Or [H], le même arc BDI est aussi perpendiculaire à l'arc GDH. Donc (d), les points G (d) N. 191. & H auxquels ces arcs GIH & GDH se rencontrent, sont les Pôles de cet arc BDI. Ainsi (e), (e) N. 188. les arcs IEG & IFH sont chacun le quart de la circonférence d'un cercle; & par conséquent (f), l'arc EG est le complément de l'arc EI, c'est-à-dire, de l'angle ABD [D 1.]: & l'arc FH est le complément de l'arc IF, c'est-à-dire, de l'angle CBD [D 1.].

3^{ent} L'arc AE est le complément du côté BA (g); puisque [c] l'arc BE est le quart de la (g) N. 10.† circonférence d'un cercle: & l'arc CF est le complément du côté BC (h); puisque [c] l'arc (h) N. 10.† BF est aussi le quart de la circonférence d'un cercle.

4^{ent} Enfin, le triangle EAG est rectangle en E (i); puisque l'on vient de démontrer que le (i) N. 189. point B est l'un des Pôles de l'arc GIH. Ainsi (k), (k) N. 255. le sinus total est à la tangente de l'angle G, comme le sinus du complément EG de l'angle ABD [D 2.] est à la tangente du complément AE du côté BA [D 3.]. Pareillement, le trian-

- gle FCH est rectangle en F, par la même raison
 (*) N. 155. que le triangle EAG l'est en E. Ainsi (a), le sinus total est à la tangente de l'angle H, comme le sinus du complément FH de l'angle CBD [D 2.] est à la tangente du complément CF du côté BC [D 3.]. Mais, la tangente de l'angle G est égale à celle de l'angle H; puis-
 (4) N. 197. que (b) ces angles qui sont opposés, & dont les côtés GIH & GDH sont chacun la moitié de la circonférence d'un grand cercle [D 2.], sont
 (c) E. 1. 5. égaux. Donc (c), le sinus du complément de l'angle ABD est à la tangente du complément du côté BA, comme le sinus du complément de l'angle CBD est à la tangente du complément du côté BC; & par conséquent en échangeant (d), le sinus du complément de l'angle ABD est au sinus du complément de l'angle CBD, comme la tangente du complément du côté BA est à la tangente du complément du côté BC. Donc, C. Q. F. D.

COROLLAIRE II.

257. IL suit aussi de ce même théorème, que si dans un triangle-Sphérique quelconque, un grand cercle qui passe par le sommet de l'un des angles, est perpendiculaire au côté qui est opposé à cet angle, les sinus des Segments de la base seront réciproquement proportionnels aux tangentes des angles sur la base.

- * Fig. 107. Si dans le triangle-Sphérique ABC*, un arc BD d'un grand cercle qui passe par le sommet de l'angle B, est perpendiculaire au côté AC,

le sinus du segment AD sera au sinus du segment CD, comme la tangente de l'angle C est à celle de l'angle A.

Démonstr. Le triangle ABD est rectangle (a) N. 255. en D [H]. Ainsi (a) le sinus total est au sinus du segment AD, comme la tangente de l'angle A est à celle de l'arc BD; & par conséquent (b), le rectangle fait du sinus total & de la tangente de l'arc BD, est égal au rectangle fait du sinus du segment AD & de la tangente de l'angle A. Mais (c), le même rectangle fait du sinus total & de la tangente de l'arc BD, est aussi égal au rectangle fait du sinus du segment CD & de la tangente de l'angle C; puisque le triangle CBD étant aussi rectangle en D [H], le sinus total est au sinus du segment CD, comme la tangente de l'angle C est à celle de l'arc BD (d). Donc, le rectangle fait du sinus du segment AD & de la tangente de l'angle A, est égal au rectangle fait du sinus du segment CD & de la tangente de l'angle C; & par conséquent (e), le sinus du segment AD est au sinus du segment CD, comme la tangente de l'angle C est à la tangente de l'angle A. Donc, C. Q. F. D.

PROPOSITION III. Théorème.

258. Dans un triangle-Sphérique, le rectangle fait des sinus de deux côtés quelconques, est au rectangle fait des sinus des différences de ces deux mêmes côtés à la moitié de la somme des trois côtés, comme le carré du sinus total est à celui du sinus

262 **TRAITE' COMPLET**
de la moitié de l'angle compris par ces deux premiers côtés.

* Fig. 108. Dans le triangle-Sphérique ABC*, le rectangle fait des sinus des côtés, par exemple AC & AB, est au rectangle fait du sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & CB, & du sinus de la différence du côté AB à cette même moitié, comme le quarré du sinus total est à celui du sinus de la moitié de l'angle A.

L'angle A peut être droit (fig. 108.) aigu (fig. 109.) ou obtus (fig. 110.). Ainsi, ce théorème a trois cas, que nous allons démontrer chacun en particulier, après la construction suivante qui est pour tous les cas.

Constr. Supposant le triangle ABC décrit sur la surface de la Sphère, tracez (a) sur le plan du secteur AgC, (c'est-à-dire, sur celui des grands cercles de cette Sphère, dont le secteur AgC est une partie DGF,) les projections DE † & FE des côtés AB & CB. Tirez des extrémités D & F de l'arc AC ou DF, les diamètres DH & FI. Tirez ensuite (b) du point E, la perpendiculaire VL au diamètre DH, & la perpendiculaire EN au diamètre FI. Du point L tirez au point N, la ligne LN; & à la ligne EN, la perpendiculaire LP (c). Faites l'arc NX égal à l'arc DL. Divisez (d) l'arc

(a) N. 243. (b) E. l. 1. p. 11. & 12. (c) E. l. 1. p. 12. (d) E. l. 3. p. 30.

† Trois des points de la figure 108 sont marqués chacun par deux lettres; afin que la même construction puisse servir pour tous les cas.

DFNX en deux parties égales DZ & ZX.
 Du centre G, tirez au point Z le rayon GZ.
 Abaissez du point F, la perpendiculaire FM
 au diamètre DH, & la perpendiculaire FQ
 au rayon GZ (a). Tirez (b) le diamètre bK (a) E. 1. 1.
 perpendiculaire au diamètre DH. Prolongez (c) (b) E. 1. 1.
 les projections DE & FE, jusqu'à ce qu'elles P. 11.
 rencontrent en des points H & I, les diamètres (c) N. 248.
 DH & FI. Du point T auquel la projection
 DE va couper le diamètre bK, élevez à ce
 diamètre (d) la perpendiculaire TR. Tirez (d) E. 1. 1.
 du point R au point K, la ligne RK. Du centre P. 11.
 G, abaissez (e) le rayon GY perpendiculaire à (e) E. 1. 1.
 cette ligne RK. Enfin (f), tirez (dans la Fi- P. 12.
 gure 108,) du point L au diamètre bK, la (f) E. 1. 1.
 perpendiculaire Lc; & (dans les Figures 109,
 & 110,) du point R au diamètre DH, la
 perpendiculaire Ra.

PREMIER CAS.

Démonstr. Premièrement, l'arc DF * est égal * Fig. 108.
 à l'arc AC [c]. Ainsi, puisque (g) la ligne MF (g) N. 7.
 qui [c] est perpendiculaire au diamètre DH,
 est le sinus de l'arc DF, elle est aussi celui de
 l'arc AC.

Secondement, si l'arc DK qui [c] est le quart
 de la circonférence du cercle bHKD, étoit vû
 parallèlement au rayon GK qui le termine par
 son extrémité K, sa projection seroit le rayon
 DG ou DT (h); puisque (i) le sinus du quart (h) N. 146.
 de la circonférence d'un cercle est un rayon de (i) N. 8.
 ce même cercle : & la projection de la partie

- (a) N. 246. LK de ce même arc, feroit (a) la partie **VG**
 (b) E. 1. ou ET de ce rayon; puisque (b) cette partie **ET**
 P. 34. est égale à la ligne **Lc** perpendiculaire [c] au
 (c) N. 7. diamètre **bK**, & par conséquent (c), sinus
 de cette partie **LK**. Ainsi, l'autre partie **DV**
 ou **DE** de ce même rayon, est la projection de
 l'autre partie **DL** de ce même arc. Or [c], cette
 même partie **DE** est aussi la projection de l'arc
AB. Donc, l'arc **DL** est égal à l'arc **AB**, &
 (d) N. 7. par conséquent, puisque (d) la ligne **VL** qui [c] est
 perpendiculaire au diamètre **DH**, est le sinus
 de l'arc **DL**; elle est aussi celui de l'arc **AB**.

Troisièmement; l'arc **FE** de la demi-Ellipse
FEI, est la projection de l'arc **FN** du demi-
 (e) N. 247. cercle **FNI** (e); puisque [c] le point **F** est celui
 auquel les circonférences de cette demi-Ellipse
 & de ce demi-cercle rencontrent leur diamètre
 commun **FI**, & que la ligne **DE** perpendicu-
 laire [c] à ce diamètre, est l'ordonnée de cette
 même demi-Ellipse, qui correspond à l'ordon-
 née **dN** de ce même demi-cercle. Or [c], ce
 même arc **FE** est aussi la projection de l'arc **CB**.
 Donc, l'arc **FN** est égal à l'arc **CB**. Ainsi, puis-
 que [c] l'arc **DF** est égal à l'arc **AC**, & que [c]
 l'arc **NX** l'est à l'arc **DL** qui vient d'être dé-
 montré égal à l'arc **AB** [D 1.]; l'arc **DFNX**
 qui est la somme de ces trois arcs **DF**, **FN**,
 & **NX**, est aussi celle des trois côtés **AC**, **CB**,
 & **AB**. Mais, l'arc **DZ** est [c] la moitié de cet
 arc **DFNX**, l'arc **FZ** est la différence de l'arc
DF à cet arc **DZ**, & l'arc **EZ** est celle de l'arc
DE

DL à ce même arc DZ. Donc, l'arc FZ est la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AC, CB & AB, l'arc LZ est celle du côté AB à cette même moitié; & par conséquent, puisque (a) la ligne FQ qui est per- (a) N. 7.
pendiculaire [c] au rayon GZ, est le sinus de l'arc FZ, & que la ligne LO qui est perpendiculaire (b) au † même rayon GZ, est le sinus (b) E. 1. 3.
de l'arc LZ, la ligne FQ est le sinus de la dif- P. 3.
férence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AC, CB & AB, & la ligne LO est le sinus de la différence du côté AB à cette même moitié.

Quatrièmement, l'arc KYR est [c] le quart de la circonférence du cercle bHKD; ainsi il est la mesure de l'angle A, puisque [H] cet angle est droit. Or, l'arc KY est la moitié de l'arc KYR; puisque le rayon GY qui [c] est perpendiculaire à la corde KR, divise cette corde (c) en (c) E. 1. 3.
deux parties égales KS & SR; & par conséquent P. 3.
aussi (d) l'arc KYR en deux parties égales KY (d) E. 1. 3.
& YR. Donc, l'arc KY est la mesure de la P. 30.
moitié de l'angle A; & par conséquent, puisque (e) la ligne KS qui [c] est perpendiculaire (e) N. 7.
au rayon GY, est le sinus de l'arc KY, elle est aussi celui de la moitié de l'angle A.

Cinquièmement enfin (f), les triangles MGF (f) E. 1. 13
& PEL sont équiangles; puisque [c] ils sont P. 32.
rectangles, l'un en M & l'autre en P, & qu:

† Le rayon GZ divise l'arc LZN en deux parties égales; puisque [c] DZ est égal à ZX, & DL à NX.

les lignes FM & LE étant perpendiculaires chacune [c] à la même ligne DH, & les lignes FG & LP l'étant aussi chacune [c] à la même ligne EN, les angles MFG & PLÉ sont égaux (a).
 (a) E. 1. 11. P. 10.
 (b) E. 1. 6. P. 4. Ainsi (b), $MF : GF$ ou $GK :: LP : EL$. Or, $VL : GK :: EL : TK$; puisque les lignes VL & EL ne sont qu'une même ligne, de même que les lignes GK & TK. Donc, si l'on multiplie chaque terme de la première de ces deux proportions, par chaque terme correspondant de la seconde, on aura (c) cette nouvelle proportion; le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de LP & de EL est au rectangle fait de EL & de TK; & par conséquent (d), comme LP est à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur EL.

Mais, LP est à TK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS. Car
 (e) E. 1. 12. 10 (e), les triangles FGQ & LNP sont équiangles; puisque [c] ils sont rectangles, l'un en Q & l'autre en P, & que les lignes FG & LP étant perpendiculaires chacune [c] à la même ligne EN, & les lignes FQ & LN l'étant aussi l'une [c] & l'autre [d] à la même ligne GZ, les angles
 (f) E. 1. 11. P. 10. GFQ & PLN sont égaux (f). 2° Les triangles SGK & TRK sont aussi équiangles; puisque [c] ils sont rectangles, l'un en S & l'autre en T, &
 (g) E. 1. 6. P. 4. que l'angle K leur est commun. Ainsi (g), 1° $FQ : FG :: LP : LN$; 2° $KS : KG$ ou $FG :: TK$:
 (h) E. 1. 6. P. 16. KR. Donc (h), 1° le rectangle fait de FQ

& de LN est égal au rectangle fait de FG & de LP : 2^o le rectangle fait de KS & de KR est égal au rectangle fait de FG & de TK ; & par conséquent, le rectangle fait de FQ & de LN est au rectangle fait de KS & de KR, comme le rectangle fait de FG & de LP est au rectangle fait de FG & de TK. Mais (a), ^{(a) E. 1. 3. P. 3.} LO est la moitié de LN, & KS est la moitié de KR. Donc (b), le rectangle fait de FQ & de LO est au carré de KS, comme le rectangle fait de FG & de LP est au rectangle fait de FG & de TK ; & par conséquent (c), comme ^{(b) E. 1. 5. P. 15.} LP est à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur FG. ^{(c) E. 1. 6. P. 1.}

Donc (d), le rectangle fait de MF & de VL ^{(d) E. 1. 5. P. 11.} est au carré de GK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au carré de KS ; & par conséquent en échangeant (e), le rectangle fait ^{(e) E. 1. 5. P. 16.} de MF & de VL est au rectangle fait de FQ & de LO, comme le carré de GK est au carré de KS.

Or, MF est le sinus du côté AC [D 1.] VL est le sinus du côté AB [D 2.] : FQ est le sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC [D 3.] : LO est le sinus de la différence du côté AB à la même moitié [D 3.]. GK est le sinus total (f) : ^{(f) N. 2.} enfin, KS est le sinus de la moitié de l'angle A [D 4.]. Donc, le rectangle fait des sinus des côtés AC & AB est au rectangle fait &c. & par conséquent, C. Q. E. 1^o D.

Démonstr. Premièrement, on démontre que
 • Fig. 109. la ligne MF * est le sinus de l'arc AC, de la même manière dont on l'a fait dans la première partie de la démonstration précédente.

Secondement ; l'arc DE de la demi-Ellipse DTH est la projection de l'arc DL du demi-cercle DKH (a).; puisque [c] le point D est celui auquel les circonférences de cette demi-Ellipse & de ce demi-cercle rencontrent leur diamètre commun DH ; & que la ligne VE qui [c] est perpendiculaire à ce diamètre, est l'ordonnée de cette même demi-Ellipse, qui correspond à l'ordonnée VL de ce même demi-cercle. Or [c], le même arc DE est aussi la projection de l'arc AB. Donc, l'arc DL est
 (a) N. 147. égal à l'arc AB ; & par conséquent, puisque (b) la ligne VL qui [c] est perpendiculaire au diamètre DH, est le sinus de l'arc DL, elle est aussi celui de l'arc AB.

Troisièmement, on démontre que la ligne FQ est le sinus de la différence du côté AC à la moitié de la somme des trois côtés AC, CB & AB ; & la ligne LO, le sinus de la différence du côté AB à cette même moitié, en appliquant à cette figure, la troisième partie de la démonstration précédente.

Quatrièmement, l'angle A est aigu [H].
 (c) N. 195. Ainsi (c), il est égal à l'inclinaison du plan de l'arc AB au plan de l'arc AC ; c'est-à-dire, à l'inclinaison du demi-cercle dont le secteur

AgB fait partie, au cercle dont le secteur AgC fait aussi partie, lequel [c] est le cercle bHKD. Or (a), la ligne GT est le sinus du complément (a) N. 147. de cette inclinaison ; puisqu'elle est la moitié du petit axe de la demi-Ellipse DTH qui [c] est la projection de ce demi-cercle sur le cercle bHKD. Donc, la ligne GT est le sinus du complément de l'angle A. Mais, cette même ligne GT est aussi le sinus du complément de l'arc KYR ; puisque (b) elle est égale à la ligne (b) E. 1. 1. aR perpendiculaire [c] au diamètre DH, & P. 33. par conséquent (c) sinus de l'arc RH qui est le (c) N. 7. complément de cet arc KYR. Donc, (d) l'arc (d) N. 20. † KYR est la mesure de l'angle A ; & par conséquent, puisque l'on démontre de la même manière dont on l'a fait dans la quatrième partie de la démonstration précédente, que l'arc KY est la moitié de l'arc K YR, & que la ligne KS est le sinus de l'arc KY, la ligne KS est le sinus de la moitié de l'angle A.

Cinquièmement enfin, on démontre aussi de la même manière dont on l'a fait dans la cinquième partie de la démonstration précédente, que MF : GF ou GK :: LP : EL. Or (e), VL : GK :: (e) E. 1. 5. EL : TK ; puisque (f) les lignes VL & GK (f) P. 19. N. 147. † étant les ordonnées du demi-cercle DKH qui correspondent aux ordonnées VE & GT de la demi-Ellipse DTH, VL : GK :: VE : GT. Donc (g), le rectangle fait de MF & de VL (g) E. 1. 6. est au quarré de GK, comme le rectangle fait (g) P. 22. de LP & de EL est au rectangle fait de EL &

(a) E. 1. 6. de TK ; & par conséquent (a), comme LP est
 P. 11. à TK, puisque ces deux derniers rectangles ont
 une même hauteur EL.

Mais, en appliquant à cette figure 109 ce
 qui est dit dans la cinquième partie de la dé-
 monstration précédente, on fait voir que LP
 est à TK, comme le rectangle fait de FQ &
 (b) E. 1. 5. de LO est au carré de KS. Donc (b), le rec-
 P. 11. tangle fait de MF & de VL est au carré de
 GK, comme le rectangle fait de FQ & de LO
 est au carré de KS ; & par conséquent en
 (c) E. 1. 5. échangeant (c), le rectangle fait de MF & de
 P. 16. VL est au rectangle fait de FQ & de LO,
 comme le carré de GK est au carré de KS.
 Or, MF est le sinus du côté AC [D 1.] : VL
 est le sinus du &c. Donc, &c. & par consé-
 quent, C. Q. F. 2° D.

TROISIÈME CAS.

Démonstr. Premièrement, en appliquant à la
 figure 110 ce qui est dit dans les trois pre-
 mières parties de la démonstration précédente,
 on démontre 10, que la ligne MF est le sinus
 de l'arc AC : 2°, que la ligne VL est le sinus de
 l'arc AB : 3° enfin, que la ligne FQ est le sinus
 de la différence du côté AC à la moitié de la
 somme des trois côtés AB, AC & CB ; & la
 ligne LO, le sinus de la différence du côté AB
 à cette même moitié.

(d) N 195. *Secondement*, l'angle A est obtus [H]. Ainsi (d),
 il est égal au supplément de l'inclinaison du
 plan de l'arc AB au plan de l'arc AC. Or, on

démontre que l'arc bR est la mesure de cette inclinaison, de la même manière dont on a démontré dans la quatrième partie de la démonstration précédente, que l'arc KYR * est la mesure de l'angle A dont il s'agit dans ce cas : & (a) l'arc KYR * est le supplément de l'arc bR . Donc, l'arc KYR est la mesure de l'angle A ; & par conséquent, puisque l'on démontre aussi de la même manière dont on l'a fait dans la quatrième partie de la même démonstration précédente, que l'arc KY est la moitié de l'arc KYR , & que la ligne KS est le sinus de l'arc KY , la ligne KS est le sinus de la moitié de l'angle A .

Troisièmement enfin, on démontre aussi de la même manière dont on l'a fait dans la cinquième partie de la même démonstration précédente, que $MF : GF$ ou $GK :: LP : EL$. Or (b), $VL : GK :: EL : TK$; puisque (c) VL & GK étant les ordonnées du demi-cercle DKH qui correspondent aux ordonnées VE & GT de la demi-Ellipse DTH , $VL : VE :: GK : GT$. Donc (d), le rectangle fait de MF & de VL est au carré de GK , comme le rectangle fait de LP & de EL est au rectangle fait de EL & de TK ; & par conséquent (e), comme LP est à TK , puisque ces deux derniers rectangles ont une même hauteur EL .

Mais, en appliquant à cette même figure ce qui est dit dans la cinquième partie de la démonstration précédente, on fait voir que

* Fig. 109.

(a) N. 6. §. 1.
* Fig. 100.

(b) E. 1. §. 5.
P. 18.
(c) N. 247. §. 1.

(d) E. 1. §. 6.
P. 22.

(e), (c) E. 1. §. 6.
P. 1.

LP est à TK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS. Donc (a), le rectangle fait de MF & de VL est au quarré de GK, comme le rectangle fait de FQ & de LO est au quarré de KS; & par conséquent (b) E. l. 5. en échangeant (b), le rectangle fait de MF & de VL est au rectangle fait de FQ & de LO, comme le quarré de GK est au quarré de KS. Or, MF est le sinus du côté AC [D 1.]: VL est le sinus du &c. Donc, &c. & par conséquent, C. Q. F. 3^o D.

Donc, C. Q. F. D.

CHAPITRE II.

Des Problèmes de la Trigonométrie-Sphérique.

259. **I**L s'agit à présent de faire voir comment on doit se servir des Principes que nous venons d'établir, pour résoudre un triangle-Sphérique quelconque; c'est-à-dire, pour trouver les parties inconnues de tel triangle-Sphérique que ce puisse être, dont trois quelconques des six parties que l'on peut y considérer, sont connues. Mais, comme on ne peut parvenir à résoudre la plus grande partie de ceux de ces triangles qui sont obliquangles, qu'en les comparant à des triangles-rectangles, nous divisons ce chapitre en deux articles; dont le premier contient la résolution des triangles-Sphériques rectangles;

DE TRIGONOMETRIE. 273
rectangles ; & le dernier , celle des triangles-
Sphériques obliquangles.

ARTICLE PREMIER.

*De la résolution des triangles-Sphériques
rectangles.*

260. Lorsqu'il faut trouver quelque-une des parties inconnues de tel triangle que ce soit , il y a toujours quatre des six parties que l'on peut considérer dans ce triangle qui sont *Usuelles*, c'est-à-dire , qui entrent dans le problème , savoir , les trois parties connues , & la partie que l'on cherche : & si ce même triangle est rectangle , l'une de ces quatre parties , savoir l'angle droit , est *constante* ; & les trois autres sont *variables*. Or , si lorsqu'il s'agit d'un triangle rectangle , on considère l'angle droit comme n'interrompant point la contiguité des autres parties , *deux seulement des parties variables de ce triangle sont de suite* , ou *toutes le sont*. Ainsi , l'on peut réduire tous les problèmes qui concernent la résolution des triangles-Sphériques rectangles , aux deux suivans , qui dépendent , l'un de la première proposition du chapitre précédent (a) , & l'autre de la seconde (b). ^{(a) N. 250.}

Mais , comme on ne peut constituer aucune des ^{(b) N. 255.} proportions démontrées dans cette première proposition , qu'avec les sinus des parties opposées les unes aux autres , ni aucune des proportions

démontrées dans cette seconde proposition, qu'avec les sinus & les tangentes des côtés adjacents à l'angle droit, on ne peut opérer immédiatement que sur les triangles dans lesquels les parties usuelles sont opposées les unes aux autres; & sur ceux dont les côtés adjacents à l'angle droit sont des parties usuelles. Ainsi, chacun de ces problèmes a deux cas.

PROBLÈME I.

261. Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique rectangle, dont il n'y a que deux des parties variables qui soient de suite.

PREMIER CAS.

Lorsque les parties usuelles sont opposées les unes aux autres.

262. On donne dans le triangle-Sphérique *Fig. 111.* ABC* qui est rectangle en A, le côté AC de 41 deg. 12 min. avec l'hypoténuse BC de 59 deg. 17 min. & il faut trouver l'angle B.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite, savoir, l'hypoténuse BC, & l'angle demandé B. De plus, les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, le côté AC, l'hypoténuse BC, & l'angle demandé B,) sont opposées les unes aux autres. Ainsi (a), le sinus de l'hypoténuse BC est au sinus du côté AC, comme le sinus de l'angle A est au sinus de l'angle B. Par conséquent, on

trouvera cet angle B (a), de la manière suivante. (a) N. 110.

Complément du logarithme du sinus de l'hypoténuse BC donnée de 59 deg. 17 m. - - - 0.0656512
 Logarithme du sinus du côté AC donné de 41 deg. 12 m. - - - 9.8186807

Logarithme du sinus de l'angle demandé B - - - 9.8843319
 qui (b) donnera 50 deg. 0 m. 16 f. p. m. pour la valeur de (b) N. 103.
 cet angle ; lequel est aigu (c), puisque le côté AC vaut moins (c) N. 224.
 que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui donneroit 129 deg. 59 min. 44 f. p. p. pour la valeur de ce même angle (d), si ce même côté AC valoit plus que le quart de la (d) N. 225.
 circonférence d'un cercle.

AUTRE EXEMPLE.

263. On donne dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'hypoténuse BC * Fig. 112. de 67 deg. 28 min. avec l'angle C de 51 deg. 44 min. & il faut trouver le côté AB.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont aussi de suite ; savoir, l'hypoténuse BC, & l'angle C. De plus, les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, l'angle C, l'hypoténuse BC, & le côté demandé AB,) sont aussi opposées les unes aux autres. Ainsi (e), le sinus de l'angle A est au sinus (e) N. 259. de l'angle C, comme le sinus de l'hypoténuse BC est au sinus du côté AB. Par conséquent, on trouvera ce côté AB (f), de la manière suivante. (f) N. 1054

Logarithme du sinus de l'angle C donné de 51 deg. 44 m. - - - 9.8949453
 Logarithme du sinus de l'hypoténuse BC donnée de 67 deg. 28 m. - - - 9.9655106

Logarithme du sinus du côté demandé AB - - 29.8604559
 qui (g) donnera 46 d. 29 m. 53 f. p. p. pour la valeur de ce côté (g) N. 103.

276 **TRAITE' COMPLET**

lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cer-
 (a) N. 228. cle (a), puisque l'angle C est aigu : mais, qui donneroit 133 deg.
 (b) N. 229. 30 min. 7 sec. p. m. pour la valeur de ce même côté (b), si
 ce même angle étoit obtus.

AUTRE EXEMPLE.

264. Enfin, on donne dans le triangle-
 Fig. 113. Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'angle C
 de 57 deg. 34 min. avec le côté AB de 42 deg.
 57 min. & il faut trouver l'hypoténuse BC.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seu-
 lement des parties variables sont encore de
 suite; sçavoir, l'angle C, & l'hypoténuse de-
 mandée BC. De plus, les parties usuelles, (qui
 sont l'angle droit A, l'angle C, l'hypoténuse
 demandée BC, & le côté AB,) sont encore
 (c) N. 230. opposées les unes aux autres. Ainsi (c), le sinus
 de l'angle C est au sinus de l'angle A, comme
 le sinus du côté AB est au sinus de l'hypoténuse BC.
 Par conséquent, on trouvera cette hypoténuse,
 (d) N. 110. (d) de la manière suivante.

Complément du logarithme du sinus de l'angle C	
donné de 57 deg. 34 m. - - - - -	0.0736493
Logarithme du sinus du côté AB donné de 42 deg.	
57 min. - - - - -	9.8333766
Logarithme du sinus de l'hypoténuse demandée BC	9.9070259

(e) N. 103. qui (e) donnera 53 deg. 49 min. 7 s. p. p. pour la valeur de
 (f) N. 233. cette hypoténuse (f), lorsque l'angle B sera aigu, ou lorsque
 & 240. le côté AC vaudra moins que le quart de la circonférence d'un
 cercle : mais, qui donneroit 126 deg. 10 min. 53 sec. p. m.
 (g) N. 233. pour la valeur de cette même hypoténuse (g), si l'angle B
 & 240. étoit obtus, ou si le côté AC valoit plus que le quart de la
 circonférence d'un cercle.

S C H O L I E.

265. Lorsque l'on propose en général la résolution du triangle-Sphérique ABC* comme on* Fig. 113: le fait ici, il y a une ambiguïté; puisque pour déterminer la valeur de l'hypoténuse BC, il faut sçavoir de quelle espece est l'angle B ou le côté AC, & que cette espece est inconnue. Mais cette ambiguïté disparoît lorsque ce triangle est appliqué à une question astronomique; parce qu'il y a toujours alors quelque une des circonstances de la question qui fait connoître cette espece, comme on le verra dans les Usages que nous donnerons à la fin de ce Traité. Or, il en est de même de tous les cas dans lesquels il se rencontre quelque ambiguïté.

S E C O N D C A S.

Lorsque les parties usuelles ne sont point opposées les unes aux autres.

266. On donne dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, le côté AB de 28 d. * Fig. 114. 35 min. avec le côté AC de 39 deg. 58 min. & il faut trouver l'hypoténuse BC.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; sçavoir, le côté AB, & le côté AC (a). Cependant, comme les parties usuelles, (qui sont l'angle droit A, le côté AB, le côté AC, & l'hypoténuse demandée BC,) ne sont point opposées les unes aux autres, on ne peut former immédiatement avec les sinus de ces parties, aucune des proportions démontrées au N° 250. Mais,

en prolongeant vers les points D & E, le côté BA, & l'hypoténuse BC, jusqu'à ce que les arcs BD & BE soient chacun le quart de la circonférence d'un cercle; & en supposant ensuite qu'un arc d'un grand cercle qui passe par ces points D & E, rencontre en un point F le côté AC prolongé aussi vers ce point, on a un autre triangle ECF, dont les parties usuelles, (qui sont l'angle droit E †, l'angle F dont le complément AD du côté donné AB est la mesure, le complément CF du côté donné AC, & le complément CE de l'hypoténuse demandée BC,) sont rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 263; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

<i>Logarithme du sinus de l'angle F qui est le complément du côté AB donné de 28 deg. 35 m.</i>	9.9435549
<i>Logarithme du sinus du complément CF du côté AC donné de 39 deg. 58 m.</i>	9.8844659

<i>Logarithme du sinus du complément CE de l'hypoténuse demandée BC</i>	9.8280208
---	-----------

(*) N. 103. qui (a) donne 42 d. 17 m. 59 f. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 47 deg. 42 min. 1 sec. pour celle de cette hypoténuse.

Fig. 114. † On démontre dans le triangle ECF *, que l'angle E est droit: que l'arc CF est le complément de l'arc AC: que l'arc AD est le complément de l'arc AB, & la mesure de l'angle F: que l'arc CE est le complément de l'hypoténuse BC: que l'arc DE est la mesure de l'angle B: que l'arc EF est le complément de cet arc DE: enfin, que l'angle ECF est égal à l'angle BCA; en appliquant à cette figure une démonstration pareille à celle du N^o 256: Et il en sera de même de tous les triangles que nous serons obligés de former dans la suite, par les prolongemens des côtés d'un premier triangle.

SCHOLIE.

267. Dans le triangle ABC * que nous ve-^{* Fig. 114.}
 nons de proposer, chaque côté AB & AC est
 plus petit que le quart de la circonférence d'un
 cercle. Mais, souvent les côtés d'un triangle-
 Sphérique valent, l'un plus que le quart de la cir-
 conférence d'un cercle, & l'autre moins; ou chacun
 plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

268. Or ^{1^{ent}}, si les côtés d'un triangle-Sphé-
 rique rectangle valent l'un plus que le quart de
 la circonférence d'un cercle, & l'autre moins, si
 par exemple, dans le triangle-Sphérique ABC ** Fig. 115.
 qui est rectangle en A, le côté AB est de 129 deg.
 18 min. & le côté AC de 47 deg. 23 min. l'hy-
 poténuse BC vaudra aussi plus que le quart de
 la circonférence d'un cercle (a). Ainsi, l'on pourra (a) N. 236.
 prendre sur ce côté AB, & sur cette hypoténuse
 BC, des arcs BD & BE égaux chacun au quart
 de la circonférence d'un cercle. Or, si l'on suppose
 ensuite qu'un arc d'un grand cercle passe par les
 points D & E, & rencontre en un point F le
 côté AC prolongé vers ce point, on aura un trian-
 gle CEF, dont les parties usuelles, (qui (b) se- (b) N. 266.†
 ront l'angle droit E, l'angle F dont le complé-
 ment † DA du côté donné AB est la mesure,
 le complément CF du côté donné AC, & le
 complément EC de l'hypoténuse demandée BC,)

† Cet excès d'un arc sur le quart de la circonférence d'un
 cercle, s'appelle aussi le Complément de cet arc.

se trouveront rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 263 ; & donneront par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Logarithme du sinus de l'angle F qui est le complément du côté AB donné de 129 deg. 18 m.	9.8016649
Logarithme du sinus du complément CF du côté AC donné de 47 deg. 23 min.	9.8306464

Logarithme du sinus du complément EC de l'hypoténuse demandée BC - - - - - 89.6323113

(a) N. 103. qui (a) donne 25 d. 23 m. 41 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 115 deg. 23 min. 41 s. p. p. pour celle de cette hypoténuse.

*Mais, si au lieu de faire la construction précédente, on aime mieux prolonger le côté AC * vers le point D, jusqu'à ce que l'arc CD soit le quart de la circonférence d'un cercle ; prendre ensuite sur l'hypoténuse BC un arc CE qui soit aussi le quart de la circonférence d'un cercle ; & supposer enfin, qu'un arc DE d'un grand cercle passe par les points D & E : on aura un triangle FBE, dont les parties usuelles, (qui (b) seront l'angle droit E, l'angle BFE qui est égal à l'angle DFA dont le complément DA du côté donné AC est la mesure, le complément FB du côté donné AB, & le complément EB de l'hypoténuse demandée BC,) se trouveront encore rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 263 ; & donneront par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :*

Logarithme

DE TRIGONOMETRIE. 181

Logarithme du sinus de l'angle BFE qui est le complément du côté AC donné de 47 deg. 23 m. - - - - - 9.8306464

Logarithme du sinus du complément FB du côté AB donné de 129 deg. 18 m. - - - 9.8016649

Logarithme du sinus du complément EB de l'hypoténuse demandée BC - - - - - 29.6323113

qui est le même que celui qu'on a trouvé par la construction précédente, & qui donne par conséquent le même nombre 25 deg. 13 min. 41 sec. p. p. pour la valeur de ce complément.

269. 2^{ent} Si les côtés d'un triangle-Sphérique rectangle valent chacun plus que le quart de la circonférence d'un cercle ; si par exemple, dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectan-^{Fig. 117.} gle en A, le côté AB est de 134 deg. 42 min. & le côté AC de 112 deg. 30 min. l'hypoténuse BC vaudra moins que le quart de la circonférence d'un cercle (a). Ainsi, si après avoir (a) N. 213 prolongé cette hypoténuse vers le point E, jusqu'à ce que l'arc BE soit le quart de la circonférence d'un cercle, & avoir pris sur le côté AB un arc BD qui soit aussi le quart de la circonférence d'un cercle, on suppose qu'un arc DE d'un grand cercle passe par les points D & E, on aura un triangle FCE, dont les parties usuelles, (qui seront (b) l'angle droit E, l'angle CFE qui est (b) N. 266. égal à l'angle DFA dont le complément AD du côté donné AB est la mesure, le complément FC du côté donné AC, & le complément EC de l'hypoténuse demandée BC,) seront rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 263 ; & donneront par conséquent une proportion

N n

282 TRAITE' COMPLET.

pareille à celle de ce No. Ainsi :

Logarithme du sinus de l'angle CFE, qui est le complément du côté AB donné de 134 deg. 42 m.	9 8471998
Logarithme du sinus du complément FC du côté AC donné de 112 deg. 30 m. - - - -	9,5828397.
Logarithme du sinus du complément EC de l'hypoténuse demandée BC - - - -	19.4300388

(a) N. 103. qui (a) donne 15 d. 36 m. 55 f. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 74 d. 23 m. 5 f. p. m. pour celle de cette hypoténuse.

Mais, si au lieu de faire la construction précédente, on aime mieux prolonger les côtés AB & AC, jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point D ; on aura un triangle DBC, dont les côtés BD & CD vaudront chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle ; & dont les parties usuelles, (qui seront l'angle droit (b) N. 197. D (b), le côté BD qui est le supplément du côté (c) N. 186. AB (c), le côté CD qui est le supplément du côté (d) N. 186. AC (d), & l'hypoténuse demandée BC,) seront rangées dans le même ordre que celles du premier triangle de ce second cas (e). Ainsi, l'on trouvera cette hypoténuse, de la même manière dont on a trouvé celle de ce premier triangle.

Nous avertissons que nous proposerons peu d'exemples de triangles qui ont des côtés plus grands que le quart de la circonférence d'un cercle, ou des angles obtus ; ce que nous venons de dire dans cette Scholie, étant suffisant pour faire voir la manière dont il faut s'y prendre, toutes les fois qu'il se rencontre de ces sortes de triangles.

AUTRE EXEMPLE.

270. On donne dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'angle B de 47 deg. 16 min. avec l'angle C de 68 deg. 33 m. & il faut trouver l'un ou l'autre des côtés AB & AC. * Fig. 119.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; sçavoir, le côté que l'on cherche, & l'angle qui lui est adjacent. Mais, les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'angle donné C, l'autre angle donné B, & celui des côtés AB & AC, dont on cherche la valeur, ne sont point opposées les unes aux autres. Ainsi, ^{1^{er}} pour trouver le côté AB, il faut par une construction pareille à celle du N^o 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (a) l'angle droit E, l'angle EBF qui est égal à l'angle donné ABC, le complément EF de l'autre angle donné C, & le complément BF du côté demandé AB,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 264; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

Complément du logarithme du sinus de l'angle EBF	
donné de 47 d. 16 m.	0.1339964
Logarithme du sinus du complément EF de l'angle C	
donné de 68 d. 33 m.	9.5631122

Logarithme du sinus du complément BF du côté	
demandé AB	9.6971089

qui (b) donne 29 deg. 51 min. 31 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 60 deg. 8 min. 29 sec. pour

- celle de ce côté ; lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*a*) , puisque l'angle C qui lui est opposé est aigu : mais , qui donneroit 119 deg. 51 min. 31 sec. pour la valeur de ce même côté (*b*) , si ce même angle étoit obtus.

2^{ent} Pour trouver le côté AC , il faut aussi par une construction pareille à celle du N^o 266 , former un autre triangle HCI dont les parties usuelles , (qui sont (*c*) l'angle droit H , l'angle HCI qui est égal à l'angle donné ACB , le complément HI de l'autre angle donné B , & le complément CI du côté demandé AC ,) se trouvent aussi rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 264 ; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

Complément du logarithme du sinus de l'angle HCI donné de 68 d. 33 m. - - - - -	0.9311730
Logarithme du sinus du complément HI de l'angle B donné de 47 d. 16 m. - - - - -	9.8660034
Logarithme du sinus du complément CI du côté demandé AC - - - - -	9.8971766

- (*d*) N. 103. qui (*d*) donne 52 deg. 6 min. 32 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 37 deg. 53 min. 28 sec. pour celle de ce côté ; lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (*e*) , puisque l'angle B qui lui est opposé est aigu : mais , qui donneroit 142 deg. 6 min. 32 sec. p. p. pour la valeur de ce même côté (*f*) , si ce même angle étoit obtus.

S C H O L I E.

271. Lorsque dans un triangle-Sphérique rectangle dont les parties usuelles ne sont point opposées les unes aux autres , deux seulement des parties variables se trouvent de suite , on

est sûr qu'en prolongeant † les côtés, on formera avec la circonférence du grand cercle qui aura pour Pôle l'un des angles obliques de ce triangle, un autre triangle dont les parties usuelles seront opposées les unes aux autres; & donneront par conséquent quelque-une des proportions démontrées au N^o 250. Mais on peut se méprendre au côté vers lequel il faut faire ce prolongement. Car, si pour trouver le côté AB* du triangle-Sphérique* Fig. 129† ABC, on avoit prolongé ses côtés vers les points G, H & I, les parties usuelles du triangle HCI que l'on auroit formé par ces prolongemens, (lesquelles auroient été (a) l'angle droit H, l'angle (a) N. 266† HCI qui est égal à l'angle donné ACB, le complément HI de l'autre angle donné B, & l'angle I qui est le complément du côté demandé AB,) ne se seroient point trouvées opposées les unes aux autres. Or, lorsque cela arrive, il faut prolonger ces mêmes côtés vers d'autres points D, E & F, comme nous l'avons fait.

AUTRE EXEMPLE.

272. On donne dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, le côté AC de* Fig. 120, 43 deg. 17 min. avec l'hypoténuse BC de 72 deg. 35 min. & il faut trouver l'autre côté AB.

Solution. Dans le triangle proposé, deux

† Nous supposons ici, conformément à ce que nous avons dit à la fin du N^o 269, que les côtés dont il s'agit valent moins que le quart de la circonférence d'un cercle. Mais s'ils étoient plus grands, au lieu de les prolonger, il faudroit prendre sur eux des parties égales au quart de la circonférence d'un cercle; comme nous l'avons fait aux N^{os} 268 & 269.

286 TRAITE' COMPLET

seulement des parties variables sont de suite, sçavoir, le côté AC, & le côté demandé AB. Mais, comme les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'hypoténuse BC, le côté AC, & le côté demandé AB, ne sont point opposées les unes aux autres, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle ECF, dont les parties usuelles, (qui sont (a) le complément CF du côté donné AC, le complément CE de l'hypoténuse donnée BC, l'angle droit E, & l'angle F qui est le complément du côté demandé AB,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 262; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi ;

<i>Complément du logarithme du sinus du complément</i>		
CF du côté AC donné de 43 d. 17 m.	- - -	0.1378852
<i>Logarithme du sinus du complément CE de l'hypoténuse BC donnée de 72 d. 35 m.</i>		
- - -	- - -	9.4761334
<i>Logarithme du sinus de l'angle F qui est le complément du côté demandé AB</i>		
- - -	- - -	9.6140186
(b) N. 103, qui (b) donne 24 deg. 16 min. 41 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 65 deg. 43 m. 19 sec. p. m. pour celle de ce côté; lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (c), puisque l'hypoténuse BC, & le côté AC, valent aussi chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 114 deg. 16 min. 41. sec. p. p.		
(d) N. 239. pour la valeur de ce même côté (d), si cette même hypoténuse valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, &c.		

AUTRE EXEMPLE.

273. On donne dans le triangle-Sphérique
 Fig. 121. ABC * qui est rectangle en A, l'angle C de 39

DE TRIGONOMETRIE. 287

deg. 45 min. avec le côté AB de 28 deg. 35 min.
 & il faut trouver l'autre angle B.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont de suite; savoir, le côté AB, & l'angle demandé B. Mais, comme les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'angle C, le côté AB, & l'angle demandé B, ne sont point opposées les unes aux autres, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (a) le complément BF du côté donné AB, le complément EF de l'angle donné C, l'angle droit E, & l'angle EBF qui est égal à l'angle demandé ABC,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 262; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Complément du logarithme du sinus du complément

BF du côté AB donné de 28 d. 35 m. - - - - 0.0564451

Logarithme du sinus du complément EF de l'angle C

donné de 39 d. 45 m. - - - - 9.8858370

Logarithme du sinus de l'angle demandé EBF ou ABC - 9.9422828

qui (b) donne 61 deg. 6 min. 37 sec. p. p. pour la valeur de (b) N. 1032
 cet angle (c), si le côté AC qui lui est opposé, ou l'hypoténuse (c) N. 2414
 BC, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle :
 mais, qui donnera 128 deg. 53 min. 23 sec. p. m. pour la valeur
 de ce même angle (d), si ce même côté AC, ou, cette même (d) N. 2424
 hypoténuse BC, vaut plus que le quart de la circonférence d'un
 cercle. Ainsi, il faut connoître l'espece du côté AC, ou celle de
 l'hypoténuse BC, pour pouvoir déterminer celle de l'angle de-
 mandé ABC. Voyez le N° 269.

274. Enfin, on donne dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, l'angle C de 46 deg. 58 min. avec le côté AC de 34 deg. 29 min. & il faut trouver l'autre angle B.

Solution. Dans le triangle proposé, deux seulement des parties variables sont encore de suite; sçavoir, le côté AC, & l'angle C. Mais, comme les parties usuelles, qui sont l'angle droit A, l'angle C, le côté AC, & l'angle demandé B, ne sont point opposées les unes aux autres, il faut encore par une construction pareille à celle du N^o 266, former un autre triangle ECF, dont (a) N: 266 les parties usuelles, (qui sont (a) l'angle droit E, l'angle ECF qui est égal à l'angle donné ACB, le complément CF du côté donné AC, & le complément EF de l'angle demandé B,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 263; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

Logarithme du sinus de l'angle ECF donné de 46 d.

58 m. - - - - - 9.8638917

Logarithme du sinus du complément CF du côté

AC donné de 34 d: 29 m. - - - - - 9.9160805

Logarithme du sinus du complément EF de l'angle
demandé B - - - - - 9.7799722

(b) N. 163. qui (b) donne 37 deg. 3 min. 2 l. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 52 deg. 56 min. 58 séc. p. m. pour

(c) N. 224. celle de cet angle; lequel est aigu (c), puisque le côté AC qui lui est opposé, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 127 deg. 3. m. 2 l. p. p. pour la

(d) N. 225. valeur de ce même angle (d), si ce même côté AC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

PROBLESME II.

175. Trouver les parties inconnues d'un triangle - Sphérique rectangle, dont toutes les parties variables sont de suite.

PREMIER CAS.

Lorsque les côtés adjacents à l'angle droit sont parties usuelles.

176. On donne dans le triangle - Sphérique ABC* qui est rectangle en A, le côté AB de 28 deg. 35 min. avec le côté AC de 41 deg. 12 min. & il faut trouver l'un ou l'autre des angles B & C. Fig. 1134

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont le côté AB, le côté AC, & celui des angles B & C dont on cherche la valeur, sont de suite. De plus, les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, sont parties usuelles. Ainsi (a) ¹ent, le (a) N. 1555, sinus du côté AB est au sinus total, comme la tangente du côté AC est à la tangente de l'angle B. Par conséquent, on trouvera cet angle (b), de la manière suivante. (b) N. 1104

Complément du logarithme du sinus du côté AB
donné de 28 d. 35 m. - - - - - 0.3201757

Logarithme de la tangente du côté AC donné de
41 d. 12 m. - - - - - 9.9122233

Logarithme de la tangente de l'angle demandé B 10.2623990

qui (c) donnera 61 deg. 20 min. 34 sec. p. p. pour la valeur (c) N. 103.
de cet angle; lequel est aigu (d), puisque le côté AC qui lui est (d) N. 224.
opposé, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle :
mais, qui donneroit 118 deg. 39 min 26 s. p. m. pour la
valeur de ce même angle (e), si ce même côté valoit plus que (e) N. 225.
le quart de la circonférence d'un cercle.

290 TRAITE' COMPLET

^{2^{ent}}, le sinus du côté AC est au sinus total, comme la tangente du côté AB est à la tangente de l'angle C. Par conséquent, on trouvera cet (a) N. 110. angle (a), de la manière suivante.

Complément du logarithme du sinus du côté AC	
donné de 41 d. 12 m.	0.1813193
Logarithme de la tangente du côté AB donné de	
28 d. 35 m.	9.7362693
Logarithme de la tangente de l'angle demandé C	9.9175826

- (b) N. 103. qui (b) donnera 49 deg. 35 min. 46 sec. p. p. pour la valeur de cet angle; lequel est aigu (c), puisque le côté AB qui lui est opposé, vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 140 deg. 24 m. 14 s. p. m. pour la valeur de ce (d) N. 225. même angle (d), si ce même côté valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

AUTRE EXEMPLE.

277. On donne dans le triangle-Sphérique * Fig. 124. ABC * qui est rectangle en A, le côté AB de 37 deg. 14 min. avec l'angle C qui est opposé à ce côté, de 53 deg. 8 min. Et il faut trouver l'autre côté AC.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont le côté AB, l'angle C, & le côté AC dont on cherche la valeur, sont de suite. De plus, les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, sont (N. 255. parties usuelles. Ainsi (e), la tangente de l'angle C est à la tangente du côté AB, comme le sinus total est au sinus du côté AC. Par conséquent, (N. 111. on trouvera ce côté (f), de la manière suivante.

DE TRIGONOMETRIE. 291

Complément du logarithme de la tangente de l'an-

gle C donné de 33 d. 8 m. †. - - - - 9.8750102

Logar. de la tang. du côté AB donné de 37 d. 14 m. - 9.8807900

Logarithme du sinus du côté demandé AC - - 19.7558302

qui (a) donnera 34. deg. 44 min. 36 sec. p. p. pour la valeur de (a) N. 103.

ce côté ; lequel vaudra moins que le quart de la circonférence

d'un cercle (b), lorsque l'angle B qui lui est opposé sera aigu, (b) N. 218.

ou lorsque l'hypoténuse BC vaudra aussi moins que le quart & 240.

de la circonférence d'un cercle : mais, qui donnera 145 deg.

15 min. 24 sec. p. m. pour la valeur de ce même côté (c) ; lori- (c) N. 229.

que ce même angle B sera obtus, ou lorsque cette même hy- & 240.

poténuse BC vaudra plus que le quart de la circonférence d'un

cercle. Ainsi, il faut connoître l'espece de l'angle B, ou celle

de l'hypoténuse BC, pour pouvoir déterminer celle du côté

demandé AC, Voyez le N° 265.

AUTRE EXEMPLE.

278. Enfin, on donne dans le triangle-Sphé-

rique ABC * qui est rectangle en A, le côté AC * Fig. 129.

de 32 deg. 40 min. avec l'angle C qui est ad-

jaçant à ce côté, de 48 deg. 51 min. & il faut

trouver l'autre côté AB.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes

les parties variables, qui sont le côté AC, l'an-

gle C, & le côté AB dont on cherche la va-

leur, sont encore de suite. De plus, les côtés

AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A,

sont parties usuelles. Ainsi (d), le sinus total est (d) N. 255.

au sinus du côté AC, comme la tangente de l'an-

gle C est à celle du côté AB. Par conséquent, (e) N. 105.

on trouvera ce côté (e), de la manière suivante.

Logarithme du sinus du côté AC donné de 32 d.

40 m. - - - - - 9.7321932

Logarithme de la tangente de l'angle C donné de

48 d. 51 m. - - - - - 10.0585415

Logarithme de la tangente du côté demandé AB - 19.7907347

qui (f) donnera 31 deg. 42 m. 4 s. p. m. pour la valeur de ce côté ; (f) N. 103.

† Voyez le N° 108.

- (a) N. 228. lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (a), puisque l'angle C qui lui est opposé est aigu : mais, qui donneroit 148 deg. 17 m. 56 f. p. p. pour la valeur de ce même
- (b) N. 229. côté (b), si ce même angle étoit obtus.

SECOND CAS.

Lorsque les côtés adjacents à l'angle droit ne sont point parties usuelles.

279. On donne dans le triangle-Sphérique
 * Fig. 126. ABC* qui est rectangle en A, l'angle B de 40 deg. 27 min. avec l'angle C de 51 deg. 18 min. & il faut trouver l'hypoténuse BC.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont l'angle B, l'angle C, & l'hypoténuse BC dont on cherche la valeur, sont de suite. Cependant, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, on ne peut constituer immédiatement avec les sinus & les tangentes des parties usuelles de ce triangle, aucune des proportions démontrées au N° 255. Mais, si par une construction pareille † à celle du N° 266, on forme un autre triangle ECF, les parties usuelles de cet autre triangle, (qui seront (c) l'angle ECF qui est égal à l'angle donné ACB, le complément EF de l'angle donné B, l'angle droit E, & le complément CE de l'hypoténuse demandée BC,) se trouveront rangées dans le même ordre que

† Si quelque côté du triangle proposé valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle, on se serviroit de ce que nous avons dit aux N° 268 & 269.

DE TRIGONOMÉTRIE. 293

celles du triangle du N^o 277; & donneront par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

Complément du logarithme de la tangente de l'angle

ECF donné de 51 deg. 18 m. 7 - - - 9.9037144

Logarithme de la tangente du complément EF de

l'angle B donné de 40 d. 27 m. - - - 9.8813689

Logarithme du sinus du complément CE de l'hypoté-

nuse demandée BC - - - 19.7850833

qui (a) donne 37 deg. 33 min. 52 sec. p. p. pour la valeur de (a) N. 103.

ce complément; & par conséquent, 52 deg. 26 m. 8 s. p. m.

pour celle de cette hypoténuse; laquelle vaut moins que le quart

de la circonférence d'un cercle (b), puisque les angles B & C (b) N. 240.

qui lui sont adjacents, sont de même espèce: mais, qui don-

neroit 127 deg. 33 m. 52 s. p. p. pour la valeur de cette même

hypoténuse (c), si ces angles étoient de différente espèce. (c) N. 240.

AUTRE EXEMPLE.

280. On donne dans le triangle-Sphérique

ABC * qui est rectangle en A, le côté AC de * Fig. 127.

39 deg. 28 min. avec l'hypoténuse BC de 59 deg.

17. min. & il faut trouver l'angle C.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes

les parties variables, qui sont le côté AC,

l'hypoténuse BC, & l'angle C dont on cherche

la valeur, sont de suite. Mais, comme les côtés

AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit

A, ne sont point parties usuelles, il faut par

une construction pareille à celle du N^o 266,

former un autre triangle BEF, dont les parties

usuelles, (qui sont (d) l'angle F dont le com- (d) N. 266†

plément AD du côté donné AC est la mesure,

le complément BE de l'hypoténuse donnée BC,

† Voyez le N^o 108.

294 TRAITE' COMPLET

l'angle droit E, & le complément EF de l'angle demandé C,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 277 & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

<i>Complément du logarithme de la tangente de l'angle</i>		
<i>F qui est le complément du côté AC donné de</i>		
59 d. 28 m.	- - - - -	9.9155896
<i>Logarithme de la tangente du complément BE de</i>		
<i>l'hypoténuse BC donnée de 59 d. 17 m.</i>		
	- - - - -	9.7738961
<i>Logarithme du sinus du complément EF de l'angle</i>		
<i>demandé C</i>		
	- - - - -	19.6894857

- (a) N. 103. qui (a) donne 29 deg. 17 min. 16 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 60 deg. 42 min. 44 sec. p. m.,
 (b) N. 241. pour celle de cet angle; lequel est aigu (b), puisque l'hypoténuse BC vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & que l'angle B qui est opposé au côté AC plus petit aussi que le quart de la circonférence d'un cercle, est aigu (c): mais,
 (c) N. 224. qui donneroit 119 deg. 17 min 16 sec. p. p. pour la valeur,
 (d) N. 241. de ce même angle (d), si cette même hypoténuse BC, ou ce même côté AC, valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

SCHOLIE I.

- (e) N. 269, 281. Quoique nous ayons dit (e) que nous proposerions peu d'exemples de triangles qui auroient quelques côtés plus grands que le quart de la circonférence d'un cercle, ou quelques angles obtus, nous allons cependant donner encore celui-ci, afin de ne rien oublier qui puisse causer la plus légère difficulté.

Fig. 128. On donne dans le triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le côté AB de 48 deg. 50 min. 10 s. avec l'hypoténuse BC de 100 deg. 24 min. 20 sec. & il faut trouver l'angle B.

Dans le triangle proposé, les parties variables, qui sont le côté AB, l'angle demandé B, & l'hypoténuse BC, sont de suite. Mais, les côtés AB & AC, qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles; ainsi, il faut former un autre triangle dans lequel ces côtés le deviennent. Or, pour cet effet, on prolonge le côté AB, jusqu'à ce que l'arc BAD soit le quart de la circonférence d'un cercle. On retranche du côté BC un arc BE égal aussi au quart de la circonférence d'un cercle. Enfin, on suppose qu'un arc DE d'un grand cercle passe par les points D & E. Et par ce moyen, on a un autre triangle FEC dont les parties usuelles, (qui sont (a) l'angle droit E; l'angle CFE (a) N. 266† qui est égal à l'angle AFD, dont le complément AD du côté donné AB est la mesure; le complément EC de l'hypoténuse donnée BC; & le complément FE de l'angle demandé B,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 277; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

Complément du logarithme de la tangente du complément AD du côté AB donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - - 0.0583290

Logarithme de la tangente du complément EC de l'hypoténuse BC donnée de 100 d. 24 m. 20 s. 9.2639743

Logarithme du sinus du complément FBE de l'angle demandé B - - - - - 9.3222833

qui (b) donne 12 deg. 7 min. 27 sec. p. p. pour la valeur de ce (b) N. 103. complément; & par conséquent, 102 deg. 7 min. 27 sec. pour celle de cet angle; lequel est obtus (c), puisque l'hypoténuse BC (c) N. 237. du triangle ABC valant plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & le côté AB valant moins que ce quart, le côté AC doit valoir plus que le quart de la circonférence d'un cercle (d). (d) N. 227.

282. Lorsque dans un triangle-Sphérique rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit ne sont point parties usuelles, toutes les parties variables sont de suite, on est sûr qu'en prolongeant † les côtés, on formera avec la circonférence du grand cercle qui aura pour Pôle l'un des angles obliques de ce triangle, un autre triangle dont les côtés adjacents à l'angle droit seront parties usuelles; & donneront par conséquent avec les autres parties usuelles, quelque'une des proportions démontrées au N° 255. Mais, on peut se méprendre au côté vers lequel il faut faire ce prolongement, comme nous l'avons déjà dit au N° 271. Car, si par exemple, pour trou-

* Fig. 127. ver l'angle C* du triangle ABC, on avoit prolongé les côtés vers les points G, H & I, les côtés HC & HI, qui sont adjacents à l'angle droit H du triangle HCI que l'on auroit formé par ces prolongemens, n'auroient point été parties usuelles. Or, lorsque cela arrive, il faut prolonger ces mêmes côtés vers d'autres points D, E & F, comme nous l'avons fait.

AUTRE EXEMPLE.

283. On donne dans le triangle-Sphérique * Fig. 129. ABC* qui est rectangle en A, l'angle C de 44 deg. 10 min. avec l'hypoténuse BC de 58 deg. 35 min. & il faut trouver l'autre angle B.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables; qui sont l'angle C, l'hy-

† Voyez la Note du N° 271.

poténuse BC, & l'angle B dont on cherche la valeur, sont de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du N^o 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles (qui sont (a) le complément EB de l'hypoténuse donnée BC, l'angle droit E, le complément EF de l'angle donné C, & l'angle EBF qui est égal à l'angle demandé ABC,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 276; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o, Ainsi;

Complément du logarithme du sinus du complément

BE de l'hypoténuse BC donnée de 58 deg. 35 m. 0.2829474

Logarithme de la tangente du complément EF de l'angle C donné de 44 deg. 10 m. - - - - 10.0126349

Logarithme de la tangente de l'angle demandé ABC 10.2955823

qui (b) donne 63 deg. 8 min. 47 sec. p. m. pour la valeur de (b) N. 101, cet angle; lequel est aigu (c), puisque l'hypoténuse BC vaut (c) N. 241, moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & que l'angle C est aigu: mais, qui donneroit 116 deg. 51 min. 13 sec. p. p. pour la valeur de ce même angle (d), si cette même hypoténuse BC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle. (d) N. 241

AUTRE EXEMPLE.

284. On donne dans le triangle-Sphérique ABC* qui est rectangle en A, l'angle C de 41 deg. * Fig. 130, 11 min. avec l'hypoténuse BC de 50 deg. 49 m. & il faut trouver le côté AC.

Solution. Dans le triangle proposé, toutes les parties variables, qui sont l'angle C, l'hypo-

298 TRAITE' COMPLET

ténuse BC, & le côté AC dont on cherche la valeur, sont de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du N° 266, former un autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (a) le complément EF de l'angle donné C, l'angle droit E, le complément BE de l'hypoténuse donnée BC, & l'angle F dont le complément AD du côté demandé AC est la mesure,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N° 276; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N°. Ainsi :

Complément du logarithme du sinus du complément		
EF de l'angle C donné de 41 deg. 11 m.	- -	0.1234320
Logarithme de la tangente du complément BE de		
l'hypoténuse BC donné de 50 deg. 49 m.	- -	9.9111087
Logarithme de la tangente de l'angle F complément		
du côté demandé AC	- - - -	10.0346407

- (b) N. 103. qui (b) donne 47 deg. 16 min. 57 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 42 deg. 43 min. 3 sec. p. m. pour celle de ce côté; lequel vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle (c), puisque l'hypoténuse BC, & le côté AB qui est opposé à un angle aigu C, valent aussi chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle: mais, qui donneroit 137 deg. 16 min. 57 sec. p. p. pour la valeur de ce même côté (d), si l'angle C étoit obtus, ou si l'hypoténuse BC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

AUTRE EXEMPLE.

285. Enfin, on donne dans la triangle-Sphérique ABC * qui est rectangle en A, le côté AC de 52 deg. 25 min. avec l'angle C de 39 deg. 28 min. & il faut trouver l'hypoténuse BC.

* Fig. 131.

Solution. Dans le triangle proposé ; toutes les parties variables, qui sont le côté AC, l'angle C, & l'hypoténuse BC dont on cherche la valeur, sont encore de suite. Mais, comme les côtés AB & AC qui sont adjacents à l'angle droit A, ne sont point parties usuelles, il faut par une construction pareille à celle du N^o 266, former autre triangle BEF, dont les parties usuelles, (qui sont (a) l'angle droit E, le complément EF de l'angle donné C, l'angle F dont le complément AD du côté donné AC est la mesure, & le complément EB de l'hypoténuse demandée BC,) se trouvent rangées dans le même ordre que celles du triangle du N^o 278 ; & donnent par conséquent une proportion pareille à celle de ce N^o. Ainsi :

Logarithme du sinus du complément EF de l'angle C
 donné de 39 deg. 28 m. - - - - - 9.8876142
Logar. de la tang. de l'angle F qui est le complément
du côté AC donné de 52 deg. 25 m. - - - - - 9.8862878.

Logarithme de la tangente du complément EB de
l'hypoténuse demandée BC - - - - - 19.7739020

qui (b) donne 30 deg. 43 min. 1 s. p. p. pour la valeur de ce (b) N. 103, complément ; & par conséquent, 59 deg. 16 min. 59 s. p. m. pour celle de cette hypoténuse ; laquelle (c) vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, puisque le côté AC, & le côté AB qui est opposé à un angle aigu C, valent chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle : mais, qui (d) donneroit 120 deg. 43 min. 1 s. p. p. pour la valeur de cette même hypoténuse, si ce même angle C étoit obtus, ou si ce même côté AC valoit plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

SCHOLIE.

286. On peut remarquer par les différens
 P n ii.

exemples que nous venons de proposer sur la résolution des triangles-Sphériques rectangles.
^{1^{ent}} Que les parties usuelles de ces sortes de triangles ne sont susceptibles que de 16 combinaisons différentes, dont 8 dépendent du N^o 250, & 8 du N^o 255. ^{2^{ent}} Que des 8 combinaisons qui dépendent du N^o 250, trois seulement peuvent se résoudre immédiatement; & qu'il en est de même des 8 qui dépendent du N^o 255.

ARTICLE II.

De la résolution des triangles-Sphériques obliquangles.

287. Pour traiter avec ordre de la résolution des triangles-Sphériques obliquangles, nous les distinguerons en trois especes, dont la première comprendra ceux dont les parties usuelles sont opposées les unes aux autres: la seconde, ceux dont toutes les parties connues sont séparées les unes des autres: & la troisième, ceux qui n'ont ni leurs parties usuelles opposées les unes aux autres, ni toutes leurs parties connues séparées les unes des autres. Et par ce moyen, nous réduirons tous les problèmes qui concernent ces sortes de triangles, aux trois suivans; qui dépendent, l'un de la première

(a) N. 250. proposition du chapitre précédent (a); l'autre,

(b) N. 258. de la dernière proposition du même chapitre (b);

(c) N. 260. & le dernier, de l'article précédent (c), & des N^{os} 253, 254, 256 & 257.

PROBLÈME I.

288. Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique obliquangle, dont les parties usuelles sont opposées les unes aux autres.

Lorsque dans un triangle-Sphérique obliquangle, les parties usuelles sont opposées les unes aux autres, les parties connues ne peuvent être que deux côtés, avec un angle opposé à l'un de ces côtés; & l'on cherche l'angle opposé à l'autre côté: ou deux angles, avec un côté opposé à l'un de ces angles; & l'on cherche le côté opposé à l'autre angle. Ainsi, ce problème a deux cas.

PREMIER CAS.

289. On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, le côté AB de 78 deg. * Fig. 132, 23 min., l'angle C opposé à ce côté, de 63 deg. 49 min. avec le côté AC de 53 deg. 7 min. & il faut trouver l'angle B opposé à ce dernier côté.

Solution. Le sinus du côté AB est au sinus du côté AC, comme le sinus de l'angle C est au sinus de l'angle B (a).

(a) N. 250.

Ainsi, l'on trouvera ce dernier angle (b), (b) N. 107. de la manière suivante.

Complément du logarithme du sinus du côté AB	
donné de 78 deg. 23 m. - - - - -	6.0089881
Logarithme du sinus du côté AC donné de 53 deg.	
7 m. - - - - -	9.9030136
Logarithme du sinus de l'angle C donné de 63 deg.	
49 m. - - - - -	9.9529797

Logarithme du sinus de l'angle demandé B - - 19.8649814

qui (c) donnera 47 deg. 7 min. 16 s. p. m. pour la valeur de (c) N. 103. cet angle.

S C H O L I E.

290. Quoique les ambiguïtés qui se rencontrent dans les triangles-Sphériques dont on propose la résolution en général, soient indifférentes, (a) N. 165. puisque, (comme nous l'avons déjà dit (a),) elles disparaissent lorsque ces triangles sont appliqués à des questions astronomiques; cependant, si l'on veut lever celles qui se trouvent dans la résolution générale des triangles-Sphériques obliques, on peut le faire, en supposant qu'un arc d'un grand cercle qui passe par l'un de leurs angles, forme avec leurs côtés deux triangles rectangles; & en déterminant ensuite par les principes que nous avons établis dans le troisième chapitre de la première section de ce Livre (b), l'espece des angles de ces derniers triangles, ou celle de leurs côtés, de la même manière dont nous l'avons fait à l'égard de chaque triangle-Sphérique rectangle que nous avons résolu dans l'article précédent.

Ainsi, si l'on veut, par exemple, connoître (b) N. 222. dans le triangle-Sphérique oblique ABC *, l'espece de l'angle B, on supposera qu'un arc DC d'un grand cercle passe par l'angle C, & forme avec les côtés AB, AC & CB, deux triangles ACD & BCD, qui sont rectangles l'un & l'autre en D. Et par ce moyen, l'on verra que puisque dans le premier de ces deux triangles, l'hypoténuse AC & le côté AD valent chacun moins que le quart de la circonférence d'un cercle,

le côté DC vaut aussi moins que le quart de la —
circonférence d'un cercle (a); & par conséquent, (a) N. 137.
que l'angle B du triangle BCD, qui est opposé
à ce côté DC, doit être aigu (b). Or, on pourra (b) N. 122,
déterminer de la même manière l'espece des an-
gles & des côtés d'un triangle-Sphérique obli-
quangle quelconque, toutes les fois que cette es-
pece sera susceptible de détermination.

SECOND CAS.

291. On donne dans le triangle-Sphérique* Fig. 133
obliquangle ABC*, l'angle C de 42 deg. 37 m.
le côté AB qui est opposé à cet angle, de
56 deg. 41 min. avec l'angle B de 33 deg.
50 min. & il faut trouver le côté AC qui est
opposé à ce dernier angle.

Solution. Le sinus de l'angle C est au sinus
de l'angle B, comme le sinus du côté AB est au
sinus du côté AC (c). (c) N. 250.

Ainsi, l'on trouvera ce dernier côté (d), de (d) N. 107.
la manière suivante.

Complément du logarithme du sinus de l'angle C don- né de 42 deg. 37 m.	0.1693536
Logarithme du sinus de l'angle B donné de 33 deg. 50 min.	9.7456828
Logarithme du sinus du côté AB donné de 56 deg. 41 min.	9.9220232

Logarithme du sinus du côté demandé AC - - 29.8370596

qui (e) donnera 43 deg. 24 min. 21 sec. p. p. pour la valeur (e) N. 108.
de ce côté.

292. Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique obliquangle, dont toutes les parties connues sont séparées les unes des autres.

Lorsque toutes les parties connues dans un triangle-Sphérique obliquangle sont séparées les unes des autres, ces parties ne peuvent être que les trois côtés, & l'on cherche les angles; ou les trois angles, & l'on cherche les côtés. Ainsi, ce problème a deux cas.

PREMIER CAS.

293. On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC*, le côté AB de 63 deg. 16 m. le côté AC de 31 deg. 50 min. avec le côté BC de 75 deg. 54 min. & il faut trouver chaque angle A, B & C.

Solution. Le rectangle fait des sinus des côtés AB & AC est au rectangle fait du sinus de la différence du côté AB à la moitié de la somme des trois côtés AB, AC & BC, & du sinus de la différence du côté AC à cette même moitié, comme le quarré du sinus total est au quarré du sinus de la moitié de l'angle A (a).

(*) N. 258. Ainsi, l'on trouvera cet angle, de la manière suivante.

Vient	Valeur donnée du côté AB	- - -	63 d. 16 s.
	Valeur donnée du côté AC	- - -	31 50
	Valeur donnée du côté BC	- - -	75 54
	<hr/>		
{	Somme de ces trois côtés	- - -	171 0
	Moitié de cette somme	- - -	85 30
	Différence du côté AB à cette moitié	- - -	22 14
	Différence du côté AC à cette même moitié	- - -	53 40

Complément

DE TRIGONOMETRIE. 305

2 ^{ent}	Complément du logarithme du sinus du côté AB donné de 63 d. 16 m. - - -	0.0490951
	Complément du logarithme du sinus du côté AC donné de 31 d. 50 m. - - -	0.2778186
	Logarithme du sinus de la différence du côté AB, trouvée de 22 d. 14 m. - -	9.5779275
	Logarithme du sinus de la différence du côté AC, trouvée de 53 d. 40 m. - -	9.9061107
	Logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle demandé A - - -	19.8109519
	Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle - -	9.9054759

qui (a) donnera 53 deg. 33 min. 10 sec. ²⁹/₁₁ pour la valeur de (a) N. 103, cette moitié; & par conséquent, 107 deg. 6 min. 21 sec. p. p. pour celle de cet angle.

LORSQUE l'on aura trouvé la valeur de l'angle A, on cherchera celle de l'angle B (b), (b) N. 189, de la manière suivante.

Complément du logarithme du sinus du côté BC donné de 75 deg. 54 m. - - -	0.0132856
Logarithme du sinus du côté AC donné de 31 deg. 50 m. - - -	9.7221814
Logarithme du sinus du supplément (c) de l'angle A trouvé de 107 deg. 6 m. 21 f. - - -	9.9803503 (c) N. 6,
Logarithme du sinus de l'angle demandé B - - -	9.97158173

qui (d) donnera 31 d. 19 m. 2 f. p. p. pour la valeur de cet angle. (d) N. 103,

ENFIN, on cherchera la valeur de l'angle C, de la même manière dont on vient de s'y prendre pour trouver celle de l'angle B; ou de la manière suivante (e).

Complément du logarithme du sinus du côté AC donné de 31 deg. 50 m. - - -	0.2778186
Logarithme du sinus du côté AB donné de 63 deg. 16 m. - - -	9.9509049
Logarithme du sinus de l'angle B trouvé de 31 d. 19 m. 2 f. - - -	9.7158173
Logarithme du sinus de l'angle demandé C - - -	9.9445408

qui (f) donnera 61 d. 39 m. 23 f. p. p. pour la valeur de cet angle, (f) N. 103.

† Voyez la première Note du N 145.

Q 9

SCHOLIE.

294. On peut aussi chercher la valeur de chacun des mêmes angles B & C, de la même manière dont on s'y est pris pour trouver celle de l'angle A.

SECOND CAS.

295. On donne dans le triangle-Sphérique
 * Fig. 135. obliquangle ABC *, l'angle A de 109 deg. 18 m.
 l'angle B de 35 deg. 43 min. avec l'angle C
 de 68 deg. 25 min. & il faut trouver chaque
 côté AB, AC & BC.

Solution. Si l'on suppose que trois grands cercles ont pour Pôles, l'un l'angle A, l'autre l'angle C, & le dernier l'angle B, les circonférences de ces cercles formeront un triangle DEF dont les côtés DF, DE & EF seront
 (a) N. 205. connus; puisque (a) ils seront les mesures, l'un de cet angle A, l'autre de cet angle C, & le
 . dernier, du supplément de cet angle B. Ainsi,
 (b) N. 293. l'on pourra connoître (b) la valeur de tel angle
 que l'on voudra de ce triangle DEF; & par
 (c) N. 196. conséquent, celle de l'angle F. Mais (c), l'arc
 GI est la mesure de cet angle F; puisque cet
 (d) N. 104. angle étant (d) l'un des Pôles du cercle BIG, les
 arcs FI & FG sont chacun le quart de la cir-
 (e) N. 188. conférence d'un cercle (e). Et le côté AB du
 triangle proposé est égal à cet arc GI; puisque
 l'angle B étant [c] l'un des Pôles du cercle HIF,
 l'arc BAI est le quart de la circonférence
 (f) N. 188. d'un cercle (f); & que l'angle A étant pareil-
 lement [c] l'un des Pôles du cercle HGF,

l'arc AIG est aussi le quart de la circonférence d'un cercle (a). Donc, le côté AB est aussi la mesure de ce même angle F; & par conséquent, lorsque l'on connoîtra la valeur de cet angle, on aura celle de ce côté. Or, on trouvera cette valeur (b), de la manière suivante. (b) N. 293.

1 ^{er} ent	Valeur du supplément EF de l'angle B donné de 35 deg. 43 m. - - - - -	144 d. 17 m.
	Valeur du côté DF mesure de l'angle A donné de 109 deg. 18 m. - - - - -	109 18
	Valeur du côté DE mesure de l'angle C donné de 68 deg. 25 m. - - - - -	68 25
2 ^{es}	Somme de ces trois côtés - - - - -	322 0
	Moitié de cette somme - - - - -	161 0
	Différence du côté EF à cette moitié - - -	16 43
	Différence du côté DF à cette même moitié - - -	53 42
3 ^{es}	Complément du logarithme du sinus du côté EF trouvé de 144 deg. 17 m. -	0.2337527
	Complément du logarithme du sinus du côté DF trouvé de 109 deg. 18 m. -	0.0251196
	Logarithme du sinus de la différence du côté EF, trouvée de 16 deg. 43 min. -	9.4588480
	Logarithme du sinus de la différence du côté DF, trouvée de 53 deg. 42 m. -	9.8947459
	Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé F - - -	19.6124662
	Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle -	9.8062331

qui (c) donnera 39 deg. 47 min. 51 sec. $\frac{271}{617}$ pour la valeur de (c) N. 293, cette moitié; & par conséquent, 79 deg. 35 m. 43 sec. pour celle de cet angle, laquelle, selon ce que l'on vient de démontrer, est la même que celle du côté demandé AB.

LORSQUE l'on aura trouvé la valeur du côté AB, on cherchera celle du côté AC (d), (d) N. 294. de la manière suivante.

† Voyez la première Note du N^o 145.

Complément du logarithme du sinus de l'angle C donné de 68 deg. 25 m.	0.0315714
Logarithme du sinus de l'angle B donné de 35 deg. 43 m.	9.7662473
Logarithme du sinus du côté AB trouvé de 79 deg. 35 min. 43 s.	9.9927993
Logarithme du sinus du côté demandé AC	19.7906180
(d) N. 103. qui (a) donnera 38 deg. 7 m. 54 sec. p. p. pour la valeur de ce côté.	

ENFIN, on cherchera la valeur du côté BC,
de la même manière dont on vient de s'y pren-
dre pour trouver celle du côté AC; ou de la
(b) N. 291. manière suivante (b),

Complément du logarithme du sinus de l'angle B donné de 35 deg. 43 m.	0.2337527
Logarithme du sinus du supplément de l'angle A donné de 109 deg. 18 m.	9.9748304
Logarithme du sinus du côté AC trouvé de 38 deg. 7 min 54 s.	9.7906189
Logarithme du sinus du supplément du côté deman- dé BC	19.9992511

(c) N. 103. qui (c) donnera 86 deg. 38 min. 10 sec. p. p. pour la valeur
de ce supplément; & par conséquent, 93 deg. 21 min. 50 sec.
p. m. pour celle de ce côté.

S C H O L I E.

296. On peut aussi chercher la valeur de chaque
Fig. 133. côté AC & BC, de la même manière dont on
s'y est pris pour trouver celle du côté AB; puis-
(d) N. 205. que (d) ces côtés BC & AC sont les mesures,
l'un de l'angle E du triangle DEF, & l'autre
du supplément de l'angle D du même triangle.
Et l'on peut remarquer que c'est la même chose
de résoudre le triangle DEF, ou le triangle DEH

formé par les côtés DF & EF du premier, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point H.

PROBLEME III.

297. Trouver les parties inconnues d'un triangle-Sphérique obliquangle, qui n'a ni ses parties usuelles opposées les unes aux autres, ni toutes ses parties connues séparées les unes des autres.

Lorsqu'un triangle-Sphérique obliquangle n'a ni ses parties usuelles opposées les unes aux autres, ni toutes ses parties connues séparées les unes des autres, on ne peut le résoudre qu'en le changeant en deux triangles-Sphériques rectangles, par le moyen d'un arc d'un grand cercle, que l'on suppose tiré de l'un des angles perpendiculairement au côté qui est opposé à cet angle, prolongé s'il est nécessaire (a). Mais, (a) N. 230 pour sçavoir de quel angle on doit supposer que cet arc est tiré, il faut observer qu'il doit toujours passer par la partie que l'on cherche, lorsqu'il n'y a que deux des parties connues qui soient de suite; & qu'il ne doit au contraire jamais y passer, lorsque toutes les parties connues sont de suite. Ainsi, l'on peut distinguer deux cas dans ce problème.

PREMIER CAS.

298. Lorsque deux seulement des parties connues du triangle proposé sont de suite.

299. On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC*, l'angle A de 71 deg. 48 min.* Fig. 136.

l'angle C de 56 deg. 23 min. avec le côté AE de 59 deg. 35 min. & il faut trouver l'angle B.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc

- (a) N. 297. perpendiculaire doit (a) passer par la partie dont on cherche la valeur, puisque deux seulement des parties connues sont de suite ; savoir, l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on suppose un arc BD d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle demandé B, perpendiculairement au côté AC, cet arc formera avec les côtés AB, AC & BC deux triangles ABD & CBD, qui seront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, (b) N. 283. l'on trouvera l'angle ABD (b), & le côté BD (c) (c) N. 263. On cherchera ensuite (d) l'angle CBD du second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'angle C qui est aussi donné, avec l'hypoténuse BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie ABD & CBD de l'angle demandé B ; & par conséquent, celle de cet angle demandé. Ainsi :

		Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse AB donnée de 59 deg. 35 min. - - - - -		0.2956053
(e) N. 283.	(e)	Logarithme de la tangente du complément de l'angle A donné de 71 deg. 48 min. - - - - -		9.5169097
		Logarithme de la tangente de l'angle ABD - - - - -		9.8125150
(f) N. 103.	(f)	qui (f) donne 32 deg. 59 min. 59 sec. $\frac{1}{2}$ p. m. pour la valeur de cet angle.		

DE TRIGONOMETRIE. 311

2^{ent} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Logarithme du sinus de l'angle A donné de} \\ 71 \text{ deg. } 48 \text{ min.} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 9.9777108 \\ \text{Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB} \\ \text{donnée de } 59 \text{ deg. } 35 \text{ min.} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad 9.9156918 \text{ (a) N. } 263. \end{array} \right.$

(a) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Logarithme du sinus du côté BD} \quad - \quad - \quad 9.9134026 \end{array} \right.$

qui (b) donne 55 deg. 0 min. 26 sec. p. m. pour la valeur de (b) N. 103. ce côté.

3^{ent} $\left\{ \begin{array}{l} \text{Complément du logar. du sinus du compl.} \\ \text{du côté BD trouvé de } 55 \text{ d. } 0 \text{ m. } 26 \text{ s.} \quad - \quad 0.2414869 \\ \text{Logarithme du sinus du complément de l'an-} \\ \text{gle C donné de } 56 \text{ deg. } 23 \text{ min.} \quad - \quad - \quad 9.7432226 \text{ (c) N. } 273. \end{array} \right.$

(c) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Logarithme du sinus de l'angle CBD} \quad - \quad - \quad 9.9847095 \end{array} \right.$

qui (d) donne 74 deg. 53 min. 6 sec. p. p. pour la valeur de (d) N. 103. cet angle ; laquelle étant ajoutée à celle de l'angle ABD que l'on a trouvée de 32 deg. 59 min. 59 sec. $\frac{1}{2}$, donnera 107 deg. 53 min. 5 sec. $\frac{1}{2}$ pour la valeur de l'angle demandé B.

SCHOLIE I.

300. Suivant ce que nous avons démontré au N° 253 le sinus du complément l'angle A * * Fig. 136. est au sinus du complément de l'angle C, comme le sinus de l'angle au sommet ABD est au sinus de l'autre angle - au sommet CBD. Ainsi, après avoir trouvé (e) l'angle ABD, on pourra (e) N. 299 chercher immédiatement l'angle CBD, de la manière suivante, qui est la plus courte.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 71 deg. 48 min. 0.5053795

Logarithme du sinus du complément de l'angle C donné de 56 deg. 23 min. - - - 9.7432226

Logarithme du sinus de l'angle ABD trouvé de 32 deg. 59 min. 59 sec. $\frac{1}{2}$ - - - 9.7461071

Logarithme du sinus de l'angle CBD. - - - 9.984702

qui diffère de 3 unités † de celui que l'on a trouvé au N° 299 : mais qui (f) donne le même nombre 74 deg. 53 min. 6 sec. p. p. (f) N. 103. pour la valeur de cette angle.

† Cette différence vient des fractions des secondes, que l'on néglige, ou que l'on ne détermine qu'à peu près.

* Fig. 136, 137 & 138. 301. Si dans le triangle proposé ABC^* , les angles A & C ne sont point de même espèce, l'arc perpendiculaire BD passe hors du triangle (a). Mais cela ne change rien à la manière de trouver les parties inconnues des triangles rectangles ABD & CBD . Il faut seulement remarquer que l'angle demandé ABC , qui est la somme des angles ABD & CBD , lorsque l'arc perpendiculaire BD passe dans le triangle proposé, devient la différence du plus petit de ces deux angles au plus grand, lorsque ce même arc passe hors de ce triangle.

La seule chose qui peut faire quelque difficulté lorsque ce même arc perpendiculaire passe hors du triangle dont on cherche quelque partie, est de sçavoir quels sont les angles que l'on doit prendre pour les angles au sommet, & les arcs que l'on doit prendre pour les segments de la base. Mais cette difficulté cesse, si l'on fait attention que l'on ne doit jamais compter pour l'un de ces angles, l'angle vertical du triangle proposé; ni la base de ce même triangle, pour l'un de ces segments.

Ainsi, dans chacun des triangles ABC des fig. 137 & 138, les angles ABD & CBD sont les angles au sommet, & les arcs AD & CD sont les segments de la base.

AUTRE EXEMPLE:

302. On donne dans le triangle-Sphérique * Fig. 139. obliquangle ABC^* , le côté AB de 65 deg. 18 m. le

le côté BC de 80 deg. 40 min. avec l'angle A de 58 deg. 9 min. & il faut trouver l'autre côté AC.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire doit aussi (a) passer par la partie dont on cherche la valeur, puisque deux seulement des parties connues sont aussi de suite; savoir l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on suppose un arc BD d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle B, perpendiculairement au côté demandé AC, cet arc formera avec ce côté, & avec les deux autres AB & BC, deux triangles ABD & CBD, qui seront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera le côté AD (b), & le côté BD (c). On cherchera ensuite (d) le côté DC du second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'hypoténuse BC qui est aussi donnée, avec le côté BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie AD & DC du côté demandé AC; & par conséquent, celle de ce côté demandé. Ainsi;

Premièrement, (e)

(e) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 58 deg. 9 min. - - -

0.2776112

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AB donnée de 65 deg. 18 min. - - -

9.6627093

Logarithme de la tangente du complément du côté AD - - -

9.9403245

qui (f) donne 41 deg. 4 min. 33 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 48 deg. 55 min. 27 sec. p. m. pour celle de ce côté. (f) N. 103.

(a) N. 263.

Secondement, (a)

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 58 deg.	
9 min.	9.9291289
Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB donnée	
de 65 deg. 18 min.	9.9583288
Logarithme du sinus du côté BD	19.8874577

(b) N. 103. qui (b) donne 50 deg. 30 min. 29 sec. $\frac{1}{4}$ p. m. pour la valeur de ce côté.

(c) N. 272.

Troisièmement, (c)

Complément du logarithme du sinus du complément	
du côté BD trouvé de 59 deg. 30 min. 29 sec. $\frac{1}{4}$	0.1965655
Logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse	
BC donnée de 80 deg. 40 min.	9.2099917

(d) N. 103. Logarithme du sinus du complément du côté DC 9.4065572
qui (d) donne 14 deg. 44 min. 21 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 75 deg. 15 min. 39 sec. p. m. pour celle de ce côté ; laquelle étant ajoutée à la valeur du côté AD que l'on a trouvée de 48 deg. 55 min. 27 sec. donnera 124 deg. 11 min. 6 sec. p. m. pour celle du côté demandé AC.

SCHOLIE.

303. *Suivant ce que nous avons démontré en*
 * Fig. 139. N^o 254, le sinus du complément du côté AB*
 est au sinus du complément du côté BC, comme le sinus du complément du segment AD
 est au sinus du complément du segment DC.
 (e) N. 302. *Ainsi, après avoir trouvé (e) le segment AD,*
on pourra chercher immédiatement le segment
DC, de la manière suivante, qui est la plus
courte.

DE TRIGONOMETRIE. 315

Complément du logarithme du sinus du complément du côté AB donné de 65 deg. 18 min.	0.3789618
Logarithme du sinus du complément du côté BC donné de 80 deg. 40 min.	- - - 9.2099917
Logarithme du sinus du complément du segment AD trouvé de 48 deg. 55 min. 27 sec.	- - - 9.8176032

Logarithme du sinus du complément du segment DC - - - - - 29.4065567

qui differe de cinq unités † de celui que l'on a trouvé au N° 302 : (a) N. 1034
mais qui (a) donne le même nombre 14 deg. 44 min. 21 sec. p. p.
pour la valeur de ce complément.

AUTRE EXEMPLE.

304. On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, le côté AB de 54 deg.* Fig. 140.
52 min. le côté BC de 72 d. 41 m. avec l'angle A de 47 deg. 39 min. & il faut trouver l'autre angle B:

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire doit encore (b) passer par la partie (b) N. 2974 dont on cherche la valeur, puisqu'il n'y a encore que deux des parties connues qui soient de suite; sçavoir l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on suppose un arc BD d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle demandé B, perpendiculairement au côté AC, cet arc formera avec les côtés AB, AC & BC deux triangles ABD & CBD, qui seront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée, Ainsi, l'on trouvera l'angle ABD (c), & le côté (c) N. 282.

† Voyez la Note du N° 300.

R r ij

316 TRAITE' COMPLET

(a) N. 163. BD(a). On cherchera ensuite (b) l'angle CBD du second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoitra l'hypoténuse BC qui est aussi donnée, avec le côté BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie ABD & CBD de l'angle demandé B ; & par conséquent, celle de cet angle demandé. Ainsi :

(c) N. 283.

Premièrement, (c)

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse AB donnée de 54 deg. 52 min. 0.2399689
 Logarithme de la tangente du complément de l'angle A donné de 47 deg. 39 min. - - 9.9597693

Logarithme de la tangente de l'angle ABD - 10.1997382

(d) N. 103. qui (d) donne 57 deg. 44 min. 3 sec. p. p. pour la valeur de cet angle.

(b) N. 263.

Secondement, (e)

Logar. du sinus de l'angle A donné de 47 d. 39 m. 9.8686700
 Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB donnée de 54 deg. 52 min. - - 9.9126551

Logarithme du sinus du côté BD - - 19.7813251

(f) N. 103. qui (f) donne 37 deg. 11. min. 8 sec. $\frac{1}{2}$ p. p. pour la valeur de ce côté.

(g) N. 280.

Troisièmement, (g)

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté BD trouvé de 37 deg. 11 min. 8 sec. $\frac{1}{2}$ - - 9.8800410

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse BC donnée de 72 deg. 41 min. - - 9.4938545

Logar. du sinus du complément de l'angle CBD - 19.3738955

(h) N. 103. qui (h) donne 13 deg. 40 min. 55 sec. $\frac{1}{2}$ p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 76 deg. 19 min. 4 sec. $\frac{1}{2}$ p. m. pour celle de cet angle ; laquelle étant ajoutée à la valeur de l'angle ABD, trouvée de 57 deg. 44 min. 3 sec. p. p. donne 134 deg. 3 min. 7 sec. $\frac{1}{2}$, pour celle de l'angle demandé B.

305. *Suivant ce que nous avons démontré au N° 256, la tangente du complément du côté AB * est à la tangente du complément du côté BC, comme le sinus du complément de l'angle au sommet ABD est au sinus du complément de l'autre angle au sommet CBD. Ainsi, après avoir trouvé (a) l'angle ABD, on pourra (a) N. 304. chercher immédiatement l'angle CBD, de la manière suivante, qui est la plus courte.*

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté AB donné de 54 deg. 52 min.	- - - - -	0.1526240
Logarithme de la tangente du complément du côté BC donné de 72 deg. 41 min.	- - - - -	9.4938545
Logarithme du sinus du complément de l'angle ABD trouvé de 57 deg. 44 min. 3 sec.	- - - - -	9.7274177

Logarithme du sinus du complément de l'angle CBD 19.3738962
qui surpasse de sept unités † celui que l'on a trouvé au N° 304 : mais qui (b) donne le même nombre 13 deg. 40 min. 55 sec. $\frac{1}{2}$ p. p. (b) N. 103. pour la valeur de ce complément.

AUTRE EXEMPLE.

306. *Enfin, on donne dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, l'angle A de 73 deg. 10 min. l'angle C de 52 deg. 30 min. avec le côté AB de 49 deg. 26 min. & il faut trouver l'autre côté AC.*

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire doit encore (c) passer par la partie (c) N. 297. dont on cherche la valeur, puisqu'il n'y a encore que deux des parties connues qui soient de suite; savoir l'angle A, & le côté AB. Ainsi, si l'on

† Voyez la Note du N° 300.

suppose un arc BD d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle B, perpendiculairement au côté demandé AC, cet arc formera avec ce même côté AC, & avec les deux autres AB & BC, deux triangles ABD & CBD, qui seront rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoîtra l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on

(a) N. 284.

(b) N. 263.

(c) N. 277.

trouvera le côté AD (a), & le côté BD (b). On cherchera ensuite (c) le côté DC du second de ces deux mêmes triangles, dans lequel on connoîtra l'angle C qui est aussi donné, avec le côté BD que l'on viendra de trouver. Et par ce moyen, on aura la valeur de chaque partie AD & DC du côté demandé AC; & par conséquent, celle de ce côté demandé. Ainsi:

(d) N. 284.

Premièrement, (d)

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 73 deg. 10 min. - - 0.5382184

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AB donnée de 49 deg. 26 min. - - 9.9325220

Logarithme de la tangente du complément du côté AD 10.4707404

(e) N. 103.

qui (e) donne 71 deg. 18 min. 39 sec. $\frac{2}{3}$ p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 18 deg. 41 min 20 sec. $\frac{1}{3}$ p. m. pour celle de ce côté.

(f) N. 263.

Secondement, (f)

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 73 deg. 10 min. - - 9.9809805

Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB donnée de 49 deg. 26 min. - - 9.8806154

Logarithme du sinus du côté BD - - - 19.8615939

(g) N. 103.

qui (g) donne 46 deg. 38 min. 37 sec. $\frac{2}{3}$ p. p. pour la valeur de ce côté.

Troisièmement, (a)

(a) N. 277.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle

C donné de 52 deg. 30 min. - - - 9.8849805

Logarithme de la tangente du côté BD trouvé de

46 deg. 38 min. 37 sec. $\frac{2}{3}$ - - - 10.0249332

Logarithme du sinus du côté CD - - - 19.9099137

qui (b) donne 54 deg. 21 min. 27 sec. p. p. pour la valeur de ce côté ; laquelle étant ajoutée à la valeur du côté AD, trouvée (b) N. 1036 de 18 deg. 41 m. 20 l. $\frac{1}{3}$, donnera 73 deg. 2 m. 47 sec. $\frac{1}{3}$ p. p. pour celle du côté demandé AC.

SCHOLIE.

307. *Suivant ce que nous avons démontré au No 257, la tangente de l'angle C* est à la tangente de l'angle A, comme le sinus du segment AD est au sinus du segment DC. Ainsi, après avoir trouvé (c) le segment AD, on pourra (c) N. 3064 chercher immédiatement le segment DC, de la manière suivante, qui est la plus courte.*

Complément du logarithme de la tangente de l'angle

C donné de 52 deg. 30 min. - - - 9.8849805

Logarithme de la tangente de l'angle A donné

de 73 deg. 10 min. - - - 10.5191989

Logarithme du sinus du segment AD trouvé de

18 deg. 41 min. 20 sec. $\frac{1}{3}$ - - - 9.5057342

Logarithme du sinus du segment DC - - - 29.9099136

qui ne diffère que de une unité † de celui que l'on a trouvé au N° 306 ; & qui (d) donne par conséquent le même nombre 54 deg. (d) N. 1036 21 min. 27 sec. p. p. pour la valeur de ce segment.

SECOND CAS.

308. *Lorsque toutes les parties connues du triangle proposé sont de suite.*

† Voyez la Note du N° 300.

309. On donne dans le triangle - Sphérique
 * Fig. 142. obliquangle ABC *, l'angle A de 53 deg.
 17 min. l'angle B de 82 deg. 20 min. avec le
 côté AB de 65 deg. 12 min. & il faut trouver
 l'autre angle C.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc
 perpendiculaire ne doit point passer (a) par la
 partie dont on cherche la valeur; puisque toutes
 les parties connues, qui sont l'angle A, le
 côté AB, & l'angle B, sont de suite. Ainsi, il
 faut supposer qu'un arc d'un grand cercle passe
 par l'un quelconque des angles A & B, par
 exemple par l'angle B; & forme avec les côtés
 AB, AC & BC deux triangles ABD & CBD,
 rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le
 premier de ces deux triangles, on connoît l'angle
 A qui est donné, avec l'hypoténuse AB
 qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera l'angle
 ABD (b), & le côté BD (c). Mais, l'angle
 CBD du second de ces deux mêmes triangles,
 est la différence de cet angle ABD à l'angle B
 qui est donné; & l'on vient de trouver le côté
 BD. Donc, on connoît dans ce second triangle,
 un angle avec un côté; & par conséquent, on
 trouvera (d) l'autre angle C, qui est l'angle demandé. Ainsi.

(e) N. 283.

Premièrement, (e)

Complément du logarithme du sinus du complément
 de l'hypoténuse AB donnée de 65 deg. 12 min. - 0.3773176
 Logarithme de la tangente du complément de l'angle
 A donné de 53 deg. 17 min. - 9.8726396

Logarithme de la tangente de l'angle ABD - 10.2499572

(f) N. 103. qui (f) donne 60 deg. 38 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ p. p. pour la valeur
 de

le cet angle ; laquelle étant retranchée de l'angle B , qui est donné de 82 deg. 20 min. laisse 21 deg. 41 min. 11 sec. $\frac{1}{4}$ p. m. pour celle de l'angle CBD.

Secondement , (a)

(a) N. 163.

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 53 deg.

17 min. - - - 9.9039587

Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB donnée

de 65 deg. 12 min. - - - 9.9579794

Logarithme du sinus du côté BD - - -

9.8619381

qui (b) donne 46 deg. 41 min. 31 sec. p. m. pour la valeur (b) N. 103. de ce côté.

Troisièmement , (c)

(c) N. 274.

Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de

21 deg. 41 min. 11 sec. $\frac{1}{4}$ - - - 9.5676490

Logarithme du sinus du complément du côté BD

trouvé de 46 deg. 41 min. 31 sec. - - - 9.8362738

Logarithme du sinus du complément de l'angle de-

mandé C - - - 9.4039228

qui (d) donne 14 deg. 40 min: 58 sec. p. p. pour la valeur (d) N. 103. de ce complément ; & par conséquent , 75 deg. 19 min, 2 sec. p. m. pour celle de cet angle demandé.

SCHOLIE I.

310. *Suivant ce que nous avons démontré au N^o 253 , le sinus de l'angle au sommet ABD ** Fig. 1426 est au sinus de l'autre angle au sommet CBD , comme le sinus du complément de l'angle A est au sinus du complément de l'angle C. Ainsi , après avoir trouvé (e) chaque angle ABD & (e) N. 309. CBD , on pourra chercher immédiatement l'angle C , de la manière suivante , qui est la plus courte.*

S f

322 TRAITE' COMPLET

Complément du logarithme du sinus de l'angle	
ABD trouvé de 60 deg. 38 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$	0.0596758
Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de	
21 deg. 41 min. 11 sec. $\frac{1}{4}$	9.5676490
Logarithme du sinus du complément de l'angle A	
donné de 53 deg. 17 min.	9.7765983
Logarithme du sinus du complément de l'angle	
demandé C	29.4039231

qui surpasse de trois unités † celui que l'on a trouvé au N° 309 :

(a) N. 103. mais qui (a) donne le même nombre 14 deg. 40 min. 58 sec.
p. p. pour la valeur de ce complément.

SCHOLIE II.

311. Quoique, après ce que nous avons démontré au N° 301, on ne doive avoir aucune difficulté lorsque l'arc perpendiculaire passe hors du triangle, nous allons cependant en proposer encore un exemple.

* Fig. 143. Soit un triangle sphérique obliquangle ABC*, dont on donne l'angle BAC de 126 deg. 43 min. l'angle ABC de 82 d. 20 m. avec le côté AB de 65 d. 12 m. & dont il faut trouver l'angle C.

(b) N. 197. On pourroit supposer (b) que l'arc perpendic. passe par l'angle obtus A; & alors on trouveroit l'angle C, de la même manière dont on l'a fait dans les Nos précédents, 309 & 310. Mais nous supposons que cet arc passe par l'angle B, afin de donner des exemples de tous les différents cas qui peuvent se rencontrer. Ceci suppose :

¹^{ent} Dans le triangle ABD qui est rectangle (c) N. 198. en D, on connoît l'angle BAD; puisque (c) cet angle est le supplément de l'angle BAC qui est donné de 126 deg. 43 min. On connoît aussi

† Voyez la Note du N° 300.

DE TRIGONOMÉTRIE. 329

l'hypoténuse AB qui est donnée. Ainsi, l'on trouvera (a) l'angle ABD de 60 deg. 38 m. 48 s. p. p. (a) N. 283. & (b) le côté BD de 46 deg. 41 min. 31 sec. (b) N. 163. p. m. de même qu'on les a trouvés au N° 309.

2^{ent} On ajoutera cet angle ABD à l'angle ABC qui est donné de 82 deg. 20 min. au lieu de l'en retrancher, comme on a fait au même N° 309; & l'on aura l'angle CBD de 142 deg. 58 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$

3^{ent} Enfin, on cherchera (c) l'angle C du (c) N. 274. triangle CBD, de la manière suivante, qui est la même que celle du N° 309.

Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de 142 deg. 58 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ - - - - - 9.7796634

Logarithme du sinus du complément du côté BD trouvé de 46 deg. 41 min. 31 sec. - - - - - 9.8362738

Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé C - - - - - 29.6159372

qui (d) donnera 24 deg. 23 min. 34 sec. p. p. pour la valeur de (d) N. 103. ce complément; & par conséquent, 65 deg. 36 min. 26 sec. p. m. pour celle de cet angle demandé.

Mais, si après avoir trouvé chaque angle ABD & CBD, on veut chercher immédiatement l'angle C, on peut le faire de la manière suivante, qui est la même que celle de la scholie précédente (e) (e) N. 310.

Complément du logarithme du sinus de l'angle ABD trouvé de 60 deg. 38 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ - 0.05596758

Logarithme du sinus de l'angle CBD trouvé de 142 deg. 58 min. 48 sec. $\frac{1}{4}$ - - - - - 9.7796634

Logarithme du sinus du complément de l'angle BAC donné de 126 deg. 43 min. - - - - - 9.7765983

Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé C - - - - - 29.6159372

qui ne surpasse que de trois unités † celui que l'on a trouvé par † Voyez la Note du N° 300.

324 TRAITE' COMPLET

(d) N. 103. le calcul précédent ; & qui (c) donne par conséquent le même nombre 24 deg. 23 min. 34 sec. p. p. pour la valeur de ce complément.

On peut remarquer que c'est la même chose de résoudre le triangle proposé ABC, ou le triangle ABE formé par les côtés BC & AC du premier, prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en un point E.

AUTRE EXEMPLE.

312. On donne dans le triangle-Sphérique
 * Fig. 144. obliquangle ABC *, le côté AB de 55 deg. 41 min. le côté AC de 74 deg. 53 min. avec l'angle A de 47 deg. 18 min. & il faut trouver l'autre côté BC.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire ne doit point encore (b) passer par la partie dont on cherche la valeur ; puisque toutes les parties connues, qui sont le côté AB, l'angle A, & le côté AC, sont encore de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc d'un grand cercle passe par l'un quelconque des côtés AB & AC, par exemple par le côté AC ; & forme avec ce même côté & avec les deux autres AB & BC, deux triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoît l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera le côté (c) N. 284. AD (c), & le côté BD (d). Mais, le côté DC (d) N. 263. du second de ces deux mêmes triangles, est la

DE TRIGONOMETRIE. 325

différence de ce côté AD au côté AC qui est donné ; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, les côtés BD & DC ; & par conséquent, on trouvera (a) l'hypoténuse BC, qui est le côté de- (a) N. 266. mandé. Ainsi :

Premièrement, (b)

(b) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 47 deg. 18 min. - - 0.1686680

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AB donnée de 55 deg. 41 min. - - 9.8341536

Logarithme de la tangente du complément du côté AD 10.0028216

qui (c) donne 45 deg. 11 min. 10 sec. p. p. pour la valeur (c) N. 103. de ce complément ; & par conséquent, 44 deg. 48 min. 50 sec. p. m. pour celle de ce côté ; laquelle étant retranchée du côté AC, qui est donné de 74 deg. 53 min. laisse 30 deg. 4 min. 10 sec. pour la valeur du côté DC.

Secondement, (d)

(d) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 47 deg. 18 min. - - 9.8662369

Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB donnée de 55 deg. 41 min. - - 9.9169455

Logarithme du sinus du côté BD - - - 29.7831824

qui (e) donne 37 deg. 22 min. 20 sec. p. p. pour la valeur (e) N. 103. de ce côté.

Troisièmement, (f)

(f) N. 266.

Logarithme du sinus du complément du côté BD trouvé de 37 deg. 22 min. 20 sec. - - 9.902081

Logarithme du sinus du complément du côté DC trouvé de 30 deg. 4 min. 10 sec. - - - 9.9372263

Logarithme du sinus du complément du côté demandé BC - - - 29.8374344

qui (g) donne 43 deg. 27 min. 10 sec. p. m. pour la valeur (g) N. 103. de ce complément ; & par conséquent, 46 deg. 32 min 50 sec. p. p. pour celle de côté.

313. *Suivant ce que nous avons démontré au N° 254, le sinus du complément du segment AD * est au sinus du complément du segment DC, comme le sinus du complément du côté AB est au sinus du complément du côté BC. Ainsi, après avoir trouvé (a) chaque segment AD & DC, on pourra chercher immédiatement le côté BC, de la manière suivante, qui est la plus courte.*
- Fig. 144. (a) N. 312.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment AD trouvé de 44 deg. 48 min. 50 sec.	- - - - -	0.1491089
Logarithme du sinus du complément du segment DC trouvé de 30 deg. 4 min. 10 sec.	- - - - -	9.9372265
Logarithme du sinus du complément du côté AB donné de 55 deg. 41 min.	- - - - -	9.7510991
Logarithme du sinus du complément du côté demandé BC	- - - - -	29.8374343

qui ne diffère que d'une unité † de celui que l'on a trouvé au (b) N. 103. N° précédent ; & qui (b) donne par conséquent le même nombre 43 deg. 27 min. 10 sec. p. m. pour la valeur de ce complément.

AUTRE EXEMPLE.

314. *On donne dans le triangle-Sphérique obliquangle ABC *, l'angle A de 50 deg. l'angle B de 117 deg. 24 min. avec le côté AB de 61 deg. 28 min. & il faut trouver l'autre côté BC.*
- Fig. 145. (c) N. 197.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire ne doit point encore (c) passer par la partie dont on cherche la valeur ; puisque

† Voyez la Note du N° 300.

DE TRIGONOMETRIE. 327

toutes les parties connues, qui font l'angle A, le côté AB, & l'angle B, sont encore de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B †, & forme avec les côtés AB, AC & BC, deux autres triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux triangles, on connoît l'angle A qui est donné, avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée. Ainsi, l'on trouvera l'angle ABD (a), & le côté BD (b). ^{(a) N. 182.}
^{(b) N. 163.} Mais, l'angle CBD du second de ces deux mêmes triangles, est la différence de cet angle ABD à l'angle B qui est aussi donné; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, un angle avec un côté; & par conséquent, on trouvera (c) l'hypoténuse (c) N. 185. BC, qui est le côté demandé. Ainsi :

Premièrement, (d)

(d) N. 183.

Complément du logarithme du sinus du complément de
 l'hypoténuse AB donnée de 61 deg. 28 min. - - 0.3208721
 Logarithme de la tangente du complément de l'angle
 A donné de 50 deg. - - - - - 9.9238135

Logarithme de la tangente de l'angle ABD - - 10.2446856

qui (e) donne 60 deg. 20 min. 55 sec. p. p. pour la valeur de ^{(e) N. 183.}
 cet angle; laquelle étant retranchée de celle de l'angle B, qui est
 donné de 117 deg. 24 min. laisse 57 deg. 3 min. 5. sec. p. m.
 pour la valeur de l'angle CBD.

† Il n'est point libre ici de faire passer l'arc perpendiculaire par celui des angles B & C que l'on veut; puisque si l'on supposoit que cet arc fût tiré de l'angle C, on ne connoitroit qu'un angle de plus que l'angle droit, dans chacun des triangles qu'il formeroit avec les côtés AB, AC & BC; & par conséquent, on ne pourroit résoudre aucun de ces triangles.

(a) N. 263.

Secondement, (a)

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 50 deg. 9.8842544
 Logar. du sinus de l'hypoténuse AB donnée de 61 d.
 28 min. - - - - - 9.9437611

Logarithme du sinus du côté BD - - - - - x9.8280151

(b) N. 103. qui (b) donne 42 deg. 17 min. 56 sec. $\frac{2}{3}$ p. m. pour la valeur de ce côté.

(c) N. 285.

Troisièmement, (c)

Logarithme du sinus du complément de l'angle CBD
 trouvé de 57 deg. 3 min. 5 sec. - - - - - 9.7355083

Logarithme de la tangente du complément du côté
 BD trouvé de 42 deg. 17 min. 56 sec. $\frac{2}{3}$ - - - 10.0410061

Logarithme de la tangente du complément du côté
 demandé BC - - - - - x9.7765145

(d) N. 103. qui (d) donne 30 deg. 52 min. 7 sec. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 59 deg. 7 min. 53 sec. p. p. pour celle de ce côté.

S C H O L I E.

315. Suivant ce que nous avons démontré au N^o 256, le sinus du complément de l'angle au sommet ABD * est au sinus du complément de l'autre angle au sommet CBD, comme la tangente du complément du côté AB est à la tangente du complément du côté BC. Ainsi, après avoir trouvé (e) chaque angle ABD & CBD, on pourra chercher immédiatement le côté BC, de la manière suivante, qui est la plus courte.

Complément

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle ABD trouvé de 60 deg. 20 min.

55 sec. - - - - - 0.3056393

Logarithme du sinus du complément de l'angle CBD trouvé de 57 deg. 3 min. 5 sec. - - - 9.7355083

Logarithme de la tangente du complément du côté AB donné de 61 deg. 28 min. - - - - 9.7353667

Logarithme de la tangente du complément du côté demandé BC - - - - - 29.7765143

qui diffère de deux unités † de celui que l'on a trouvé au N° 314 : mais qui (a) donne le même nombre 30 deg. 52 min. 7 sec. p. m. (e) N. 103. pour la valeur de ce complément.

AUTRE EXEMPLE.

316. Enfin, on donne dans le triangle Sphérique obliquangle ABC*, le côté AB de 58 d. * Fig. 146. 32 m. le côté AC de 69 deg. 54 min. avec l'angle A de 43 deg. 27 min. & il faut trouver l'autre angle C.

Solution. Dans le triangle proposé, l'arc perpendiculaire ne doit point encore (b) passer par (b) N. 297. la partie dont on cherche la valeur ; puisque toutes les parties connues, qui sont le côté AB, l'angle A, & le côté AC, sont de suite. Ainsi, il faut supposer qu'un arc BD d'un grand cercle passe par le sommet de l'angle B ‡ ; & forme avec les côtés AB, AC & BC deux autres triangles ABD & CBD, rectangles l'un & l'autre en D. Or, dans le premier de ces deux

† Voyez la Note du N° 300.

‡ Ce triangle est dans le même cas que celui du N° précédent ; puisque si l'arc perpendiculaire étoit tiré de l'angle A, on ne connoitroit qu'un côté de plus que l'angle droit, dans chacun des triangles qu'il formeroit avec les côtés AB, AC & BC ; & par conséquent, on ne pourroit résoudre aucun de ces triangles.

T r

430 TRAITÉ COMPLET

triangles, on connoît l'angle A qui est donné ; avec l'hypoténuse AB qui est aussi donnée.

(a) N. 284. Ainsi, l'on trouvera le côté AD (a), & le côté

(b) N. 253. BD (b). Mais, le côté DC du second de ces deux mêmes triangles, est la différence de ce côté AD au côté AC qui est aussi donné ; & l'on vient de trouver le côté BD. Donc, on connoît dans ce second triangle, les côtés

(c) N. 276. BD & DC ; & par conséquent, on trouvera (c) l'angle C, qui est l'angle demandé. Ainsi :

(d) N. 284. Premièrement, (d)

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle A donné de 43 deg. 27 min. - - - 0.1390785

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AB donnée de 58 deg. 32 min. - - - 9.7867510

Logarithme de la tangente du complément du côté AD 9.9258305

(e) N. 103. qui (e) donne 40 deg. 7 min. 52 sec. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 49 deg. 52 min. 8 sec. p. p. pour celle de ce côté ; laquelle étant retranchée du côté AC, qui est donné de 69 deg. 54 min. laisse 20 deg. 1 min. 52 sec. p. m. pour la valeur du côté DC.

(f) N. 263. Secondement, (f)

Logarithme du sinus de l'angle A donné de 43 deg. 27 min. - - - 9.8374125

Logarithme du sinus de l'hypoténuse AB donnée de 58 deg. 32 min. - - - 9.9309205

Logarithme du sinus du côté BD - - - 29.7683330

(g) N. 103. qui (g) donne 35 d. 54 m. 54 sec. $\frac{1}{4}$ p. p. pour la valeur de ce côté.

(h) N. 276. Troisièmement, (h)

Complément du logarithme du sinus du côté DC trouvé de 20 deg. 1 min. 52 sec. - - - 0.4653010

Logarithme de la tangente du côté BD trouvé de 35 deg. 54 min. 54 sec. $\frac{1}{4}$ - - - 9.8599088

Logarithme de la tangente de l'angle demandé C 10.5252098

(i) N. 103. qui (i) donne 64 deg. 41 min. 22 sec. p. p. pour la valeur de cet angle.

SCHOLIE I.

317. Enfin, suivant ce que nous avons démontré au N^o 257, le sinus du segment DC^{**} Fig. 146. est au sinus du segment AD, comme la tangente de l'angle A est à la tangente de l'angle C. Ainsi, après avoir trouvé (a) chaque (a) N. 316. segment AD & DC, on pourra chercher immédiatement l'angle C, de la manière suivante, qui est la plus courte.

Complément du logarithme du sinus du segment	
DC trouvé de 20 deg. 1 min. 52 sec.	0.4653010
Logarithme du sinus du segment AD trouvé de	
49 deg. 52 min. 8 sec.	9.8834181
Logarithme de la tangente de l'angle A donné de	
43 deg. 27 min.	9.9764209
Logarithme de la tangente de l'angle demandé C	20.3252100

qui surpasse de deux unités † celui que l'on a trouvé au N^o 316 : mais qui (b) donne le même nombre 64 deg. 41 min. 22 sec. p. p. (b) N. 103. pour la valeur de cet angle.

SCHOLIE II.

318. On peut remarquer, par les différents exemples que nous venons de donner sur la résolution des triangles-Sphériques obliquangles : 1^{er}, que les parties usuelles de ces sortes de triangles ne peuvent être combinées que de douze manières différentes : 2^{es} que de ces douze manières, deux dépendent du N^o 250 ; deux du N^o 258 ; & huit de la résolution des triangles-Sphériques rectangles, & des corollaires des N^{os} 250 & 255.

† Voyez la Note du N^o 300.

CHAPITRE III.

De la manière de faire les observations qui servent de fondement à l'Astronomie.

IL ne nous reste plus pour rendre ce Traité complet, qu'à appliquer à l'Astronomie ce que nous venons de démontrer des triangles Sphériques, dans les chapitres précédents. Mais, comme les parties de ces triangles, que nous donnerons pour connues dans les différents usages que nous allons proposer, n'auront pu l'être que par des observations, nous croyons faire plaisir aux personnes qui veulent s'adonner à l'Astronomie, & particulièrement à celles qui demeurent en Province, & qui peuvent se faire de cette science un amusement aussi agréable qu'utile, en leur apprenant la manière dont on doit faire ces observations. Ainsi :

PROBLESME I.

319. *Observer la hauteur apparente † d'une Etoile quelconque.*

* Fig. 147. Il faut observer la hauteur apparente HCS* de l'Etoile S.

† On appelle *hauteur apparente* d'un point du ciel quelconque S, un angle HCS formé par le rayon tiré du centre C de l'horizon sensible à ce point, & par la commune section HR des plans de cet horizon & du cercle vertical ‡ qui passe par ce point.

Solution. Disposez un *Quart de cercle* ABC † de manière que le fil CP qui est tendu librement par le poids P, rase, c'est-à-dire, touche légèrement, la surface du limbe ADB de cet instrument. Dirigez-le ensuite vers l'Etoile proposée S; & le faites tourner sur son axe C, jusqu'à ce que vous apperceviez cette Etoile dans l'intersection des soies qui s'entrecroisent au centre E de la lentille objective de la lunette BC. Enfin, en laissant cette lunette dans cette situation, observez le nombre que le fil CP indiquera sur le limbe ADB; & ce nombre sera celui des degrés, & parties de degrés, que contiendra la hauteur demandée HCS.

Démonstr. Le fil CP est dans le plan du vertical ¶ qui passe par l'Etoile proposée S; puisque étant librement tendu par un poids P, il est une partie de l'axe commun ZN de tous les verticaux. Or, le rayon visuel BCS est aussi dans le plan du même vertical; puisqu'il est tiré par le point C de ce fil à un point S de ce

† Nous ne donnons point ici la description du *Quart de cercle*, parce que la figure 147 fait assez connoître cet instrument. Il doit avoir aux environs de 2 pieds; de rayon.

¶ On appelle *Cercle vertical*, ou *Azimuth*, chaque grand cercle de la Sphère qui passe par le Zenith; & qui par conséquent, est perpendiculaire à l'horison. On donne à chaque vertical le nom du degré de l'horison par lequel il passe, en commençant à compter du point auquel le méridien coupe ce dernier cercle vers le Sud. Il faut cependant remarquer que le vertical qui passe par les points du vrai orient & du vrai occident, se nomme quelquefois le *premier vertical*; & que celui qui passe par les Pôles du monde, se nomme le *méridien*.

334 TRAITE' COMPLET

plan †. Donc, puisque [c] le quart de cercle ABC est dans le plan & de ce fil, & de ce rayon visuel, il est dans le plan du vertical qui passe par l'Etoile proposée S; & par conséquent, l'angle HCS que l'axe de la lunette BC, ou le rayon visuel BCS, forme avec la commune section HR de ce vertical & de l'horison sensible; est la hauteur apparente de cette Etoile. Mais, l'angle HCS est égal à l'angle ACD; puisque le même angle ACH est également la différence du premier à l'angle droit ACS, & du dernier à l'angle droit DCH: & le fil CP marque au point D le nombre des degrés que contient l'arc AD, qui est la mesure de cet angle ACD. Donc, le fil CP indique aussi au point D le nombre des degrés que contient l'angle HCS; & par conséquent, la hauteur demandée HCS. Donc, C. Q. F. F.

PROBLESME II.

320. *Observer la vraie hauteur d'une Etoile quelconque, sur l'horison sensible.*

Solution. Observez la hauteur apparente de l'Etoile proposée, de la manière dont nous (4) N. 319. venons de dire dans le problème précédent (a) qu'il faut le faire. Retranchez ensuite de la hauteur que vous aurez trouvée, ce qu'il con-

† Nous supposons pour la facilité de la démonstration, que le point C auquel le fil CD est suspendu, est un point de l'axe de la lunette BC.

viendra d'en ôter pour la *Réfraction* †, suivant la Table que nous en avons donnée à la fin de ce Traité; & le reste sera la hauteur demandée.

PROBLEMES III.

321. *Tracer une ligne méridienne ¶, sur un plan horizontal.*

Il faut tracer une ligne méridienne, sur le plan horizontal X. *

* Fig. 149.

Solution. Après vous être assuré par le moyen du niveau dont les maçons se servent ordinairement, ou d'une autre manière, que le plan proposé est parfaitement de niveau, & en avoir réparé les défauts, s'il s'y en rencontre,

† Lorsque l'on regarde au ciel un objet quelconque S *, le rayon visuel tiré de l'œil du spectateur à cet objet n'est point une ligne droite AS. Ce rayon se brise & forme un angle, en passant de l'air grossier dans l'*Aër*; ou plutôt, change de direction à mesure qu'il passe d'un air plus épais dans un air qui l'est moins, & forme une ligne courbe ABS, de manière que l'objet paroît être plus élevé qu'il ne l'est en effet; parce que l'œil qui le voit par le rayon AB, le croit au point s, pendant qu'il n'est effectivement qu'au point S. Or, cette différence entre le lieu auquel on voit un objet, & celui auquel on le verroit, si le rayon visuel ne se détournoit pas de la ligne droite, est ce que l'on appelle *Réfraction*; laquelle est mesurée par l'angle BAS, & varie, non-seulement à proportion du plus ou du moins d'élévation de l'objet sur l'horizon; mais aussi à proportion du degré d'épaisseur de l'air qui est interposé entre l'œil & l'objet. On a calculé plusieurs Tables de ces différences, & nous en donnons une à la fin de ce Traité. Mais il faut remarquer que dans ces Tables, on n'a égard qu'aux différens degrés de hauteur; parce que l'air que le rayon visuel a à traverser, n'étant pas constamment par-tout le même que celui qui environne le Spectateur, & le Baromètre ne pouvant déterminer la qualité que de celui dans lequel il est placé, il n'est guère possible d'établir quelque chose de certain sur les différences que la qualité de l'air peut causer dans les réfractions.

¶ On appelle *ligne méridienne-horizontale*, la commune section des plans du méridien & de l'horizon sensible.

* Fig. 148.

posez sur ce plan un quart de ce cercle ABC; (N. 319.) & observez (*a*) la hauteur apparente ACP d'une Etoile quelconque S située dans la partie orientale du ciel. Prenez ensuite un fil DE chargé d'un plomb E terminé en pointe, & laissant le quart de cercle dans la position où il étoit lorsque vous avez aperçu l'Etoile S dans l'intersection des soies de la lunette BC, faites suspendre ce fil à quelque distance du bout C de cette lunette, de manière que vous le voyiez dans l'intersection des mêmes soies précédentes. Marquez exactement le point F auquel le plomb E rencontre le plan X. Déterminez encore un autre point G sur le même plan X, de la même manière dont vous venez d'y déterminer le point F, & qui soit éloigné de ce dernier d'environ 3 ou 4 toises. Attendez ensuite que la même Etoile S soit passée dans l'hémisphère occidental; & lorsque vous l'estimerez être à peu près à la même hauteur à laquelle vous l'avez observée dans l'hémisphère oriental, dirigez-y la lunette bC. Elevez peu à peu le bout *b* de cette lunette à mesure que cette Etoile s'abaissera; & suivez-la attentivement; jusqu'à ce que vous la voyiez sous un angle *aCP* précisément égal à celui sous lequel vous l'avez observée au point S. Laissez le quart de cercle dans cette position; & déterminez deux points *f* & *g* sur le même plan précédent X, de la même manière dont vous y avez déjà déterminé les points F & G.

Otez

Otez le quart de cercle ABC, & tirez par les points G & F une ligne droite indéfinie GF. Tirez aussi par les points *g* & *f* une autre ligne droite *gf*, qui rencontre la précédente en un point H. Enfin, divisez (*a*) en deux parties égales (*a*) E. I. 1. par une ligne droite MR, l'angle GH*g* formé P. 5^e par les lignes GH & *g*H; & cette ligne MR sera la Méridienne demandée.

Démonstr. Suivant ce que nous avons démontré dans le problème précédent (*b*), le rayon (*b*) N. 3. 2. visuel BCS est dans le plan du vertical qui passe par l'Etoile S. Ainsi, puisque [*c*] le fil DE est perpendiculaire au plan horizontal X; & dans l'alignement de ce rayon visuel, il est une perpendiculaire abaissée d'un point du plan du vertical qui passe par l'Etoile S au plan horizontal X; & par conséquent (*c*) le point F (*c*) P. I. II. P. 38. auquel il rencontre ce dernier plan, est un point de la commune section de ces deux plans. Or, par des raisons pareilles, le point G est aussi un point de cette commune section. Donc, la ligne droite GFH qui passe par ces deux points, est cette commune section. Et l'on démontre de la même manière, que la ligne droite *gf*H est la commune section du plan du vertical qui passe par la même Etoile S située au point *s*, & du même plan précédent X. Mais, puisque [*c*] les points S & *s* sont également élevés sur l'horison, ils sont également éloignés du Méridien. Ainsi, les angles que le Méridien forme avec les verticaux qui

passent par ces points, sont égaux; & par conséquent, les angles que la commune section de ce même Méridien & du plan horizontal X forme avec les communes sections GFH & gfh de ces mêmes verticaux & de ce même plan horizontal X, sont aussi égaux. Or, la ligne MR qui [c] divise l'angle GHg en deux parties égales, est la seule ligne qui puisse former dans le plan X, des angles égaux avec les communes sections GFH & gfh. Donc, cette ligne est la commune section du Méridien & de ce plan; & par conséquent, elle est la Méridienne demandée. Donc, C. Q. F. F.

PROBLEME IV.

322. *Placer un quart de cercle dans le plan du Méridien.*

*Fig. 150. Il faut placer le quart de cercle ABC * dans le plan du Méridien.

Solution. Suspendez au dessus de la ligne méridienne MR deux fils DE & GH qui soient éloignés l'un de l'autre de quelques toises, & disposés de manière qu'étant librement tendus, l'un par le plomb E, & l'autre par le plomb H, les pointes de ces plombs rencontrent cette ligne, l'une en un point F, & l'autre en un point I. Posez ensuite sur cette même ligne, à une toise ou deux environ de distance du fil DE, le quart de cercle ABC; & l'y disposez de manière que le fil CP touchant légèrement la surface du limbe AB, la soie verticale de la lunette BC, le fil DE, & le fil GH, soient cha-

cun dans le même rayon visuel BCK; c'est-à-dire, se couvrent les uns les autres lorsqu'on les regarde au travers de la lunette BC. Enfin, fixez cet instrument dans cette position lorsque vous serez parvenu à la rencontrer; & il sera dans le plan du Méridien.

Démonstr. Le fil DE qui est perpendiculaire au plan de l'horison, puisque [c] il est tendu librement par un poids E, passe par un point F de la commune section MR. de ce plan & du Méridien (a). Ainsi, il est dans le plan du Méridien; & par conséquent, puisque par des raisons pareilles le fil GH y est aussi, l'axe de la lunette BC, c'est-à-dire le rayon visuel BCK, qui [c] passe par ces deux fils, est aussi dans le plan de ce même Méridien. Or, puisque le rayon visuel BCK est dans le plan du Méridien, le fil CP qui [c] est une perpendiculaire tirée du point C de ce rayon visuel à l'horison, y est aussi. Ainsi, puisque le quart de cercle ABC est [c] dans le plan de ce même rayon visuel & de cette perpendiculaire, il est aussi dans celui du Méridien; & par conséquent on a fait C. Q. F. F.

S C H O L I E.

323. Lorsque l'on aura tracé une ligne méridienne, suivant ce qui est enseigné dans le problème précédent (b), il sera bon de se servir de celui-ci pour s'assurer de sa justesse. Or, pour cet effet, on placera un quart de cercle dans le plan du Méridien, de la manière dont on a dit

dans ce problème qu'il faut le faire. On observera ensuite avec ce quart de cercle ainsi disposé, deux hauteurs correspondantes d'une Étoile quelconque; afin de tracer une ligne méridienne, de la même manière dont on a tracé celle du N^o 321; & si cette Méridienne, & celle que l'on veut vérifier, ne forment qu'une seule & même ligne droite, on sera assuré d'avoir opéré juste.

PROBLEME V.

324. Observer * le diamètre apparent † du Soleil, ou de la Lune.

Solution. Après avoir disposé dans le plan (a) N. 322, du Méridien (a) un quart de cercle qui ait environ 3 pieds de rayon, afin que l'on puisse y distinguer les secondes, & l'avoir fixé dans cette position, attendez le moment auquel la planète dont vous vous proposez de mesurer le diamètre, passera par ce cercle; & à l'instant (b) N. 319. de son passage, observez (b) la hauteur apparente de son bord inférieur, & celle de son bord supérieur ¶. Retranchez ensuite de chacune de ces hauteurs ce qu'il sera nécessaire d'en ôter pour les réfractions, suivant la Table

* Lorsque l'on veut observer le Soleil, il faut se servir de verres colorés, ou noircis à la fumée d'une lampe, de crainte de se blesser les yeux.

† On appelle *diamètre apparent* d'une Planette quelconque, l'angle sous lequel on apperçoit cette planète; c'est-à-dire, l'angle formé par les rayons visuels tirés de l'œil du spectateur aux extrémités du diamètre de cette planète.

¶ Pour observer la hauteur apparente de l'un des bords du disque d'une planète, il faut disposer le quart de cercle de manière que la soie horizontale de la lunette paroisse une tangente à ce bord.

que nous en donnons à la fin de ce Traité. Enfin, de la plus grande de ces hauteurs corrigées, ôtez-en la plus petite ; & le reste sera le diamètre apparent de la planète proposée : ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

S C H O L I E.

325. Cette méthode par laquelle on mesure assez exactement les diamètres apparents du Soleil & de la Lune, ne peut point servir à trouver ceux des autres planètes ; parce que ces derniers ne forment point des angles assez sensibles pour pouvoir être mesurés avec les instrumens ordinaires. Ainsi, ce n'est que par d'autres moyens que l'on est parvenu à les connoître. Mais, comme ce n'est point ici le lieu de traiter de ces différents moyens, nous avertirons seulement que M. Huygens † a déterminé le diamètre apparent de l'anneau de Saturne, de 1 min. 8 sec. celui du globe de Saturne, de 30 sec. celui de Jupiter, de 1 min. 4 sec. celui de Mars, de 30 sec. celui de Venus, de 1 min. 25 s. & qu'il n'a rien décidé de celui de Mercure, à cause de son extrême petitesse. Mais Hevelius qui a observé cette planète sur le disque du Soleil, a trouvé son diamètre de 11 s. À l'égard des diamètres du Soleil & de la Lune, leur grandeur varie très-sensiblement, de manière que le plus petit diamètre apparent du Soleil est de 31 min. 38 sec. le plus grand, de 32 min. 43 sec. ; le plus petit diamètre apparent de la

† Systh. Saturn. fol. 82.

342 *TRAITE' COMPLET*
Lune, de 29 min 30 sec. & le plus grand, de
33 min. 30 sec.

PROBLESME VI.

326. *Observer la vraie hauteur † d'une Planette quelconque, sur l'horison sensible.*

(a) N. 324. *Solution.* Observez (a) la hauteur apparente du bord ou inférieur, ou supérieur, de la Planette proposée. Retranchez ensuite de cette hauteur ce qu'il convient d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité. Enfin, si vous avez observé la hauteur du bord inférieur, ajoutez au reste le demi-diamètre de la Planette proposée : mais si vous avez observé la hauteur du bord supérieur, retranchez de ce reste le même demi-diamètre ; & la somme, ou le reste, sera la hauteur demandée.

Mais si l'on ne connoît point le diamètre de
(b) N. 324. la Planette proposée, il faudra alors observer (b) la hauteur apparente du bord inférieur de cette planette, & celle de son bord supérieur. On retranchera ensuite de chacune de ces hauteurs ce qu'il conviendra d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité. Enfin, on ajoutera les restes, & la moitié de leur somme sera la hauteur demandée.

PROBLESME VII.

327. *Observer la vraie hauteur méridienne d'un Astre quelconque, sur l'horison sensible.*

† Par la hauteur d'une Planette sur l'horison sensible, on entend la vraie hauteur du centre de cette planette sur cet horison.

Solution. Après avoir placé (a) un quart de (a) N. 322. cercle dans le plan du Méridien, & l'avoir fixé dans cette position, attendez le moment auquel l'astre proposé passera par ce cercle. A l'instant de son passage, observez (b) la vraie hauteur, (b) N. 320. avec cet instrument ainsi disposé; & cette hau- ou 326. teur sera la hauteur demandée.

PROBLEME VIII.

328. *Observer la hauteur du Pôle sur l'horizon.*

Il faut observer la hauteur OP * du Pôle P, * Fig. 157. sur l'horizon HO.

Solution. Choisissez l'une des nuits de l'hiver † à laquelle le temps vous paroîtra le plus serein : choisissez aussi l'une quelconque des Etoiles qui sont toujours sur votre horizon. Placez ensuite un quart de cercle dans le plan du Méridien (c); & après l'avoir rendu fixe dans (c) N. 322. cette position, observez (d) avec cet instru- (d) N. 319. ment la hauteur apparente de cette Etoile, à l'instant auquel elle passe par la partie HSP du Méridien, qui est au dessus du Pôle. Observez aussi (e) la hauteur apparente de la même (e) N. 319. Etoile, à l'instant auquel elle passe par la partie OSP du même Méridien, qui est au dessous du même Pôle. Retranchez ensuite la plus petite de ces deux hauteurs de la plus grande, après

† On choisit l'hiver pour faire ces observations, parce que les nuits étant alors plus longues que les jours, on peut voir les Etoiles pendant plus de douze heures, & observer par conséquent les deux hauteurs méridiennes de celles qui ne passent jamais sous l'horizon du lieu auquel l'observateur est situé.

344 **TRAITE' COMPLET**

avoir ôté de chacune ce qu'il convient d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité; & prenez la moitié SP ou sP, du reste SPs. Enfin, ajoutez cette moitié à la plus petite Os de ces hauteurs corrigées, ou retranchez-la de la plus grande OS; & la somme, ou le reste, fera la hauteur demandée OP.

C'est ainsi qu'ayant trouvé à l'Observatoire de Paris la plus grande hauteur apparente de l'Etoile polaire † marquée dans Bayer, de 50 deg. 52 min. 49 sec. & la plus petite de 46 deg. 49 min. 17 sec. on en a conclu que le Pôle y est élevé de 48 deg. 50 min. 10 sec.

Plus grande hauteur observée	-	-	-	-	50 d. 52 m. 49 s.
Réfraction	-	-	-	-	0 0 49
Vraie hauteur méridienne	-	-	-	-	50 52 0
Plus petite hauteur observée	-	-	-	-	46 49 17
Réfraction	-	-	-	-	0 0 57
Vraie hauteur méridienne	-	-	-	-	46 48 20
Première hauteur méridienne	-	-	-	-	50 52 0
Seconde hauteur méridienne	-	-	-	-	46 48 20
Différence de ces deux hauteurs	-	-	-	-	4 3 40
Moitié de cette différence	-	-	-	-	2 1 50

laquelle étant ajoutée à 46 deg. 48 min. 20 sec. ou retranchée de 50 deg. 52 min. donne pareillement 48 deg. 50 min. 10 sec: pour la hauteur du Pôle à l'Observatoire de Paris; & par conséquent, 41 deg. 9 min. 50 sec. pour celle de l'Equateur au même endroit.

PROBLEME IX.

329. *Mesurer le diamètre de la Terre.*

Solution. Choisissez deux lieux qui soient situés sous un même Méridien, & éloignés l'un
† C'est la dernière de la queue de la petite Ourse.

de

de l'autre d'une distance raisonnable ; c'est-à-dire, d'environ 20. à 30 lieues. Observez ensuite (a) avec le plus de précision qu'il sera possible, la hauteur du Pôle à chacun de ces lieux ; & soustrayez la plus petite hauteur de la plus grande , afin d'avoir l'amplitude de l'arc du grand cercle de la Terre qui est compris entre ces deux lieux. Enfin , mesurez (b) la distance de l'un de ces mêmes lieux à l'autre ; & le nombre de toises que contiendra cette distance , sera la valeur de cet arc. (a) N. 118. (b) N. 114. 151.

Or, lorsque vous connoîtrez la valeur d'un arc d'un grand cercle de la Terre, vous trouverez par une règle de proportion, la valeur d'un degré de la circonférence de ce cercle, celle de la circonférence entière ; & par conséquent, celle du diamètre demandé.

C'est de cette manière qu'ayant observé la hauteur du Pôle à Paris, de 48 deg. 50 min. 10 sec. & à Amiens, de 49 deg. 52 min. 38 sec. on a trouvé 1 deg. 2 min. 28 sec. pour l'amplitude de l'arc du grand cercle de la Terre, qui est compris entre ces deux villes qui sont situées presque sous le même méridien ; & qu'ayant ensuite mesuré (c) la distance de l'une de ces villes à l'autre, & l'ayant trouvée de 59530 toises, on a conclu que puisque 1 deg. 2 min. 28 sec. d'un grand cercle de la Terre est de 59530 toises, un degré de ce même cercle est de 97180 toises, ou de 25 lieues chacune de 2287 toises ; que par conséquent, la circonférence de la Terre est de

326 **TRAITE COMPLET**
 9000 lieues; & que son diamètre est de 2865.
PROBLEME X.

330. La distance du centre de la Terre à celui d'une planète quelconque, & la hauteur de cette planète sur l'horison, telle qu'on l'a observée, étant données; trouver la Parallaxe † de hauteur de cette planète.

* Fig. 152. On donne la distance CS* du centre C de la Terre au centre S du Soleil, de 21885 demi-diamètres de la Terre, avec la hauteur du Soleil sur l'horison sensible AB, de 30 deg. 41 min. 38 sec. telle qu'on l'a observée; & il faut trouver la parallaxe de hauteur de cet astre; c'est-à-dire, l'angle CST.

Solution. De la hauteur donnée 30 deg. 41 min. 38 sec. retranchez pour la réfraction 1 min. 40 sec. conformément à la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité; & vous aurez 30 deg. 39 min. 58 sec. pour la vraie hauteur ATS du Soleil sur l'horison AB. Ajou-

* Fig. 152. † La hauteur d'un astre quelconque S*, telle que l'observation la donne, est après l'avoir dégagée des réfractions, l'angle ATS formé par la commune section AT de l'horison sensible AB & du vertical HSZ de cet astre, & par une ligne droite TS tirée du lieu où l'observateur est placé, au centre S de ce même astre. Mais la vraie hauteur du même astre S, est l'angle HCS formé par la commune section HC du même vertical précédent HSZ & de l'horison astronomique HO, & par une ligne droite CS tirée du centre C de Terre au même point précédent S. Or l'angle CST (lequel est la différence de cette hauteur ATS à la vraie hauteur HCS; puisque (a) le complément STZ de la première surpasse de cet angle le complément SCZ de la dernière) est ce que l'on appelle la Parallaxe de hauteur de l'astre S. Il faut remarquer que celle des Etoiles fixes est absolument insensible, à cause de leur grande distance à la Terre,

(a) E. l. I.
 p. 32.

rez ensuite à cette hauteur l'angle ATC qui (a) est de 90 deg. puisque la ligne droite CT (a) E. 1. 3. est une ligne droite tirée du centre C de la P. 18. Terre au point T auquel l'horison sensible AB la touche ; & vous aurez 120 deg. 39 min. 58 s. pour la valeur de l'angle CTS. Ainsi, vous connoîtrez dans le triangle rectiligne STC, le côté CS qui est donné de 21885 parties égales, le côté CT qui est une de ces parties, avec l'angle CTS de 120 deg. 39 min. 58 sec. & par conséquent, vous trouverez de la manière suivante (b), l'angle CST qui est la parallaxe (b) N. 125. demandée,

Complément du logarithme du côté CS donné de 21885 parties	5.6598535
Logarithme du côté CT donné de 2 parties	0.0000000
Logarithme du sinus de l'angle CTS trouvé de 120 deg. 39 min. 58 sec.	9.9345761
Logarithme du sinus de la parallaxe demandée CST	25.5944296

qui donnera 8 sec. 7 tierces p. p. pour cette parallaxe.

SCHOLIE I.

331. Si au lieu de donner la hauteur apparente ATS * d'une planète, sur l'horison sensible AB, on donnoit sa vraie hauteur HCS sur l'horison astronomique HO, il faudroit alors chercher la parallaxe de hauteur CST de cette planète, de la manière dont nous allons le faire dans l'exemple suivant.

On donne la distance CS du centre C de la Terre au centre S de la Lune, de 57 demi-diamètres de la Terre, avec la vraie hauteur HCS

X x ij

* Fig. 252.

348 TRAITE' COMPLET

de cette planette sur l'horison astronomique HO, de 50 deg. 12 min. & il faut trouver sa parallaxe de hauteur CST.

Solution. Dans le triangle-rectiligne STC, on connoît le côté CS de 57 parties égales; le côté CT, d'une de ces parties; avec l'angle SCT, de 39 deg. 48 min. puisqu'il est le complément de la hauteur HCS qui est donnée de 50 deg. 12 min. Ainsi, l'on trouvera de la manière (a) N. 136. suivante (a), l'angle CST qui est la parallaxe demandée.

Premièrement,

Valeur du côté CS donné de	- - - - -	57 parties
Valeur du côté CT donné de	- - - - -	1 partie
Somme de ces deux côtés	- - - - -	58
Différence de ces deux mêmes côtés	- - - - -	56

Secondement,

Valeur de deux angles droits	- - - - -	180 d. 0 m. 0 s.
Valeur trouvée de l'angle SCT	- - - - -	39 48 0
Somme des angles CST & CTS	- - - - -	140 12 0
Moitié de cette somme	- - - - -	70 6 0

Troisièmement,

Complément du logarithme de la somme des côtés CS & CT, trouvée de 58 parties	- - - - -	8.2365720
Logarithme de la différence de ces mêmes côtés, trouvée de 56 parties	- - - - -	1.7481880
Logarithme de la tangente de la moitié de la somme des angles CST & CTS trouvée de 70 d. 6 m.	- - - - -	10.4412975
Logarithme de la tangente de la moitié de la différence des mêmes angles	- - - - -	20.4260575

(b) N. 103, qui (b) donnera 69 deg. 28 min. 52 sec. pour la valeur de cette demi-différence; laquelle étant retranchée de la demi-somme trouvée de 70 deg. 6 min. laissera 39 min. 8 sec. pour la parallaxe demandée.

SCHOLIE II.

332. Comme cette manière de trouver la parallaxe d'une planète, suppose que la distance du centre de cette planète au centre de la Terre est connue, nous en proposerons une autre au N. 416, par le moyen de laquelle on trouvera non-seulement cette parallaxe sans connoître cette distance, mais aussi cette distance après avoir trouvé cette parallaxe.

PROBLESME XI.

333. Observer la déclinaison † d'un Astre quelconque.

Solution. Observez (a) la vraie hauteur méridienne de l'astre proposé. Comparez ensuite cette hauteur à celle de l'Equateur, afin de retrancher la plus petite de la plus grande ; & le reste sera la déclinaison demandée. (a) N. 327. & 330.

PROBLESME XII.

334. Observer l'obliquité de l'Ecliptique ‡.

Solution. Observez (b) la vraie hauteur méridienne du centre du Soleil au solstice d'Été, & la vraie hauteur méridienne du même centre au solstice d'hiver. Retranchez ensuite la plus petite hauteur de la plus grande ; & le reste sera la vraie distance des Tropiques ; dont la (b) N. 327. & 330.

† On appelle *Déclinaison* d'un astre, la distance du centre de cet astre à l'Equateur. On la divise en *septentrionale* & en *méridionale*. Elle se mesure sur la circonférence du cercle de *déclinaison* de cet astre ; c'est-à-dire, sur la circonférence d'un grand cercle qui est perpendiculaire à l'Equateur, & passe par le centre de ce même astre.

‡ On appelle *Obliquité de l'Ecliptique*, ou *plus grande déclinaison du Soleil*, l'angle que l'Ecliptique forme avec l'Equateur.

moitié donnera la plus grande déclinaison du Soleil ; ou ce qui est la même chose, l'obliquité de l'Ecliptique.

C'est de cette manière qu'ayant trouvé à l'Observatoire de Paris la vraie hauteur méridienne du centre du Soleil au solstice d'Été, de 64 deg. 38 min. 20 sec. & la vraie hauteur méridienne du même centre au solstice d'hiver, de 17 deg. 41 min. 20 s. on en a conclu que la vraie distance des Tropiques est de 46 deg. 57 min. & que par conséquent, la plus grande déclinaison du Soleil, ou l'obliquité de l'Ecliptique, est de 23 d. 28 min. 30 sec.

Hauteur observée du bord inférieur du Soleil

le jour du solstice d'Été à midi	-	-	-	64 d. 22 m. 55 s.
Parallaxe †	-	-	-	0 0 5
Somme	-	-	-	64 23 0
Réfraction	-	-	-	0 0 28
<hr/>				
Vraie hauteur du bord inférieur du Soleil	-	-	-	64 22 32
Diamètre apparent du Soleil	-	-	-	0 15 48
Vraie hauteur du centre du Soleil	-	-	-	64 38 20

Hauteur observée du bord inférieur du Soleil

le jour du solstice d'hiver à midi	-	-	-	17 d. 27 m. 57 s.
Parallaxe	-	-	-	0 0 9
Somme	-	-	-	17 28 6
Réfraction	-	-	-	0 3 6
<hr/>				
Vraie hauteur du bord inférieur du Soleil	-	-	-	17 25 0

† Voyez la Table des Parallaxes du Soleil, qui est à la fin de ce Traité.

DE TRIGONOMETRIE. 351

Vraie hauteur du bord inférieur du Soleil	-	17 d. 23 m. 06 s.
Diamètre apparent du Soleil	- - -	0 16 20
Vraie hauteur du centre du Soleil	- - -	17 41 20
<hr/>		
Vraies hauteurs du centre du Soleil	- -	64 d. 38 m. 20 s.
- - -	- -	17 41 20
Vraie distance des Tropiques	- - -	46 57 0
dont la moitié	- - -	23 28 30
est la plus grande déclinaison du soleil, c'est-à-dire l'obliquité de l'Ecliptique.		

CHAPITRE IV.

Des Usages de la Trigonométrie-Sphérique.

Nous supposons qu'en lisant ces Usages on aura une Sphère sous les yeux ; & qu'on la disposera de manière qu'elle représentera au naturel les figures dont nous ne pouvons donner ici que la projection.

PREMIER USAGE.

335. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, trouver la déclinaison de tel point de ce cercle que l'on veut.*

On donne l'obliquité AVB^* de l'Ecliptique, * Fig. 152. de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison AB de son point B , qui est le 10^{me}. deg. 0 min. 34 sec. des π .

Solution. Dans le triangle-Sphérique VBA qui est rectangle en A , on connoît l'hypoténuse VB , qui est donnée de 70 d. 0 m. 34 s. avec l'angle AVB qui est aussi donné de 23 d.

352 . . . TRAITE' COMPLET

28 min. 30 sec. Ainsi , l'on cherche de la
(a) N. 263. manière suivante (a) , le côté AB qui est la
déclinaison demandée.

Logarithme du sinus de l'angle AYB donné de	
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse YB donnée	
de 70 deg. 0 min. 34 sec. - - - - -	9.9730118

Logarithme du sinus de la déclinaison demandée AB. 19.5732753
(b) N. 103. qui (b) donne 21 deg. 59 min. 3 sec. pour cette déclinaison.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 153. 336. On donne l'obliquité C Δ D* de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison CD de son point D, qui est le 14^e deg. 56 min. 54 sec. du Q.

Solution. Dans le triangle-Sphérique Δ DC qui est rectangle en C , on connoît l'hypoténuse D Δ , laquelle est le complément 45 d. 3 min. 6 sec. de l'arc σ D qui est donné de 44 deg. 56 min. 54 sec. avec l'angle C Δ D qui est aussi donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi , l'on cherche de la manière
(c) N. 263. suivante (c) , le côté CD qui est la déclinaison demandée.

Logarithme du sinus de l'angle C Δ D donné de	
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse D Δ trouvée	
de 45 deg. 3 min. 6 sec. - - - - -	9.8498763

Logarithme du sinus de la déclinaison demandée CD 19.4501398
(d) N. 103. qui (d) donne 16 deg. 22 min. 31 sec. pour cette déclinaison.

AUTRE

AUTRE EXEMPLE.

337. On donne l'obliquité $F\Delta G$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison FG de son point G, qui est le 13^{me} deg. 13 min. 42 sec. du m. * Fig. 153.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $GF\Delta$ qui est rectangle en F, on connoît l'hypoténuse ΔG , qui est donnée de 43 deg 13 min 42 sec. avec l'angle $F\Delta G$, qui est aussi donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté FG qui est la déclinaison demandée. (a) N. 263.

Logarithme du sinus de l'angle $F\Delta G$ donné de
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - 9.602635

Logarithme du sinus de l'hypoténuse ΔG donnée
de 43 deg. 13 min. 42 sec. - - - - - 9.8356318

Logarithme du sinus de la déclinaison demandée FG 29.4358953
qui (b) donne 15 deg. 49 min. 58 sec. pour cette déclinaison. (b) N. 103.

AUTRE EXEMPLE.

338. Enfin, on donne l'obliquité $K\Upsilon I$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver la déclinaison KI de son point I, qui est le 18^{me} deg. 57 min 20 sec. du m. * Fig. 153.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $IK\Upsilon$ qui est rectangle en K, on connoît l'hypoténuse $I\Upsilon$, puisqu'elle est le complément 41 deg. 2 min. 40 sec. de l'arc ΥI qui est donné de 48 deg. 57 min. 20 sec. avec l'angle $K\Upsilon I$ qui est aussi donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.

Y y

Ainsi, l'on cherche de la manière suivante
 (a) N. 163. (a), le côté KI qui est la déclinaison demandée.

Logarithme du sinus de l'angle KVI donné de	
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse IV trouvée	
de 41 deg. 2 min. 40 sec. - - - - -	9.8171301

Logarithme du sinus de la déclinaison demandée KI	9.4171936
---	-----------

(b) N. 103, qui (b) donne 15 deg. 9 min. 48 sec. pour cette déclinaison.

SCHOLIE I.

339. Nous avons pris des points dans différents quarts de l'Ecliptique; afin de faire voir la manière dont il faudra résoudre les questions suivantes, lorsqu'il s'agira d'un point situé dans une partie de ce cercle différente de celle qui sera donnée dans l'exemple que nous proposerons. Ainsi, nous ne donnerons souvent qu'un seul exemple sur chacune de ces questions.

SCHOLIE II.

340. C'est en cherchant de cette manière la déclinaison de chaque degré de l'Ecliptique, que l'on construit une Table de ces différentes déclinaisons, qui est utile pour trouver la hauteur du Pôle sur l'horison d'un lieu auquel on connoît la hauteur méridienne du Soleil; & réciproquement la hauteur méridienne du Soleil sur l'horison d'un lieu auquel on connoît la hauteur du Pôle: parce que la différence de la déclinaison du Soleil à sa hauteur méridienne, lorsque cet astre est dans

les signes septentrionaux ; ou la somme de la déclinaison du Soleil & de sa hauteur méridienne, lorsque ce même astre est dans les signes méridionaux, est toujours le complément de la hauteur du Pôle.

II. USAGE.

341. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la déclinaison d'un point quelconque de ce cercle, trouver ce point.

On donne l'obliquité $\angle \gamma B$ *, ou $\angle A \triangle B$ de * Fig. 154. l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec la déclinaison $\angle AB$, de l'un de ses points B, de 17 deg. 27 min. 35 sec. & il faut trouver ce point.

Solution. Dans le triangle-Sphérique γBA , ou $\triangle BA$, qui est rectangle en A, on connoît l'angle $\angle \gamma B$ ou $\angle A \triangle B$, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30. sec. avec le côté $\angle AB$, qui est aussi donné de 17 deg. 27 min. 35 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'hypoténuse γB , ou $\triangle B$. (a) N. 264.

Complément du logarithme du sinus de l'angle $\angle \gamma B$

ou $\angle A \triangle B$ donné de 23 deg. 28 min. 30. sec. - 0.3997365

Logar. du sinus du côté $\angle AB$ donné de 17 deg.

27 min. 35 sec. - - - - - 9.4771724

Logarithme du sinus de l'hypoténuse γB , ou $\triangle B$ 9.8769087

qui (b) donne 48 deg. 52 min. 5 sec. pour la valeur de cette (b) N. 103. hypoténuse ; & par conséquent, le point demandé sera le 18^{me} deg. 52 min. 5 sec. du γ , ou du η , lorsqu'il devra être dans le premier quart de l'Ecliptique, ou dans le troisième ; & le 11^{me} deg. 7 min. 55 sec. du ζ , ou du α , lorsqu'il devra être dans le second quart de ce même cercle, ou dans le dernier.

III. USAGE.

342. *Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, trouver l'Ascension droite † de tel point de ce cercle que l'on veut.*

* Fig. 155. On donne l'obliquité AVB * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'ascension droite VA de son point B, qui est le 9^{me} deg. 3 min. 8 sec. des \mathcal{H} .

Solution. Dans le triangle-Sphérique $VB A$ qui est rectangle en A, on connoît l'angle AVB qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse VB qui est aussi donnée de 69 deg. 3 min. 8 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté VA qui est l'ascension demandée.

Complément du logarithme du sinus du complément	
de l'angle AVB donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	0.0375199
Logar. de la tang. du compl. de l'hypoténuse VB	
donnée de 69 deg. 3 min. 8 sec. - - - -	9.5829930

Logarithme de la tangente du complément de l'ascension demandée VA . - - - - 9.6205129

(b) N. 103. qui (b) donne 22 deg. 39 min. 14 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 67 deg. 20 min. 46 sec. pour celle de l'ascension demandée.

† On appelle *Ascension droite* d'un astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphère droite, monte sur l'horison en même temps que le centre de cet astre ; ou ce qui est la même chose, l'arc de l'Equateur qui est compris entre le commencement du \mathcal{V} & le cercle de déclinaison de l'astre dont il s'agit. Mais, on appelle au contraire *Ascension oblique* d'un astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphère oblique monte sur l'horison en même temps que le centre de cet astre ; ou ce qui est la même chose, l'arc de l'Equateur qui est compris entre le commencement du \mathcal{V} & l'horison oriental, à l'instant auquel le centre de l'astre dont il s'agit est à cet horison.

AUTRE EXEMPLE.

343. On donne l'obliquité $C\Delta D^*$ de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut* Fig. 155. trouver l'ascension droite γQC de son point D, qui est le 15^{me} deg. 51 min. 11 sec. de la $\mu\gamma$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique ΔDC qui est rectangle en C, on connoît l'angle $C\Delta D$ qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse $D\Delta$, laquelle est le complément 14 deg. 8 min. 49 sec. de l'arc ϕD qui est aussi donné de 75 deg. 51 m. 11 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté $C\Delta$. (a) N. 284.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $C\Delta D$ donné de 23 deg. 28 min.
30 sec. - - - - - 0.0375199

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse $D\Delta$ donnée de 14 deg. 8 min. 49 sec. 10.5985067

Logarithme de la tangente du complément du côté $C\Delta$ - - - - - 10.6360266

qui (b) donne 76 deg. 58 min. 57 sec. p. m. pour la valeur de ce (b) N. 103. complément; & par conséquent, 13 d. 1 m. 3 s. pour celle de ce côté; laquelle étant retranchée de l'arc $\gamma\phi D$ qui est de 180 d. laissera 166 deg. 58 min. 57 sec. pour l'ascension demandée γQC .

SCHOLIE.

344. Après avoir trouvé de cette manière l'ascension droite de chaque degré de l'Ecliptique, on en construit une Table qui est d'un grand usage dans l'Astronomie.

IV. USAGE.

345. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique,

358 TRAITE' COMPLET

trouver l'angle † que ce cercle forme avec le Méridien, à l'instant auquel un point donné de ce même cercle passe par ce Méridien.

Fig. 156. On donne l'obliquité EvA * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'angle $\sphericalangle AP$ que ce cercle forme avec le Méridien EAP , à l'instant auquel le point A de ce même cercle, qui est le 10^{me} deg. 14 min. 35 sec. des H , passe par ce Méridien.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $EA\gamma$ qui est rectangle en E , on connoît l'angle EvA qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse γA qui est aussi donnée de 70 d. 14 min. 35 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle γAE qui (b) est égal à l'angle demandé $\sphericalangle AP$.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'hypoténuse γA donnée de 70 deg. 14 min.
35 sec. - - - - - 0.4710438

Logarithme de la tangente du complément de l'angle
 EvA donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. 10.3622166

Logar. de la tangente de l'angle γAE - - - 10.8332604

(c) N. 103. qui (c) donne 81 deg. 38 min. 54 sec. pour la valeur de cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'angle demandé $\sphericalangle AP$.

SCHOLIE.

346. C'est en cherchant de cette manière chacun de ces angles, que l'on en construit une Table

† L'angle dont il s'agit, est toujours celui qui est formé par la partie de l'Ecliptique qui se trouve dans l'hémisphère oriental, & par la partie du Méridien qui est comprise entre l'Ecliptique & le Pôle septentrional.

qui a aussi son usage dans l'Astronomie. Mais il faut remarquer qu'il suffit de les trouver pour chaque degré du premier quart de l'Ecliptique; parce que ceux du second quart sont les suppléments de ceux du premier, & que ceux du troisième quart & du quatrième, sont les mêmes que ceux du premier & du second, pris dans un ordre rétrogradé.

V. USAGE.

347. Connoissant la hauteur du Pôle, avec la déclinaison d'un point quelconque de l'Ecliptique, trouver la différence ascensionnelle † de ce point.

On donne la hauteur OP^* du Pôle P sur *Fig. 157. & 158. l'horison HO , de 48 deg. 50 min 10 sec. avec la déclinaison AC du point C de l'Ecliptique, de 12 deg. 20 min. & il faut trouver la différence ascensionnelle AB de ce point.

Solution. Dans le triangle-Sphérique BCA qui est rectangle en A , on connoît le côté AC qui est donné de 12 deg. 20 min. avec l'angle ABC qui est de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisqu'il a pour mesure (a) la hauteur HE de l'E- (a) N. 196. quateur EQ sur l'horison HO ; c'est-à-dire, le complément de la hauteur du Pôle P sur le même horison, laquelle est aussi donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. Ainsi, l'on cherche

† On appelle *Différence ascensionnelle* d'un astre quelconque, l'arc de l'Equateur qui est compris entre l'ascension droite & l'ascension oblique de cet astre.

(a) N. 277. de la manière suivante (a), la différence demandée AB.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle ABC trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - 0.0583290
 Logarithme de la tangente du côté AC donné de 12 deg. 20 min. - - - - - 9.3397191

Logarithme du sinus de la différence ascensionnelle demandée AB - - - - - 9.3980681

(b) N. 103. qui (b) donne 14 deg. 2 min. 25 sec. p. m. pour la valeur de cette différence.

SCHOLIE I.

348. Si au lieu de donner la déclinaison du point de l'Ecliptique dont on demande la différence ascensionnelle, on donne seulement ce point; il faut alors commencer par chercher sa déclinaison (c), & l'on trouvera ensuite sa différence ascensionnelle, de la même manière dont nous venons de le faire dans cet usage.

SCHOLIE II.

* Fig. 157. 349. Si l'on ajoute au quart EB* de la circonférence de l'Equateur, la différence ascensionnelle AB d'un point C de l'Ecliptique, qui décline vers le Pôle supérieur; ou si l'on retranche au contraire du quart EB* de la circonférence de l'Equateur, la différence ascensionnelle AB d'un point C de l'Ecliptique, qui décline vers le Pôle inférieur, la somme EBA (Fig. 157.) ou le reste EA (Fig. 158.) est un moyen arithmétique assez exact entre la partie orientale & la partie occidentale du vrai arc diurne du jour auquel

auquel ce point se trouve au Méridien en même temps que le Soleil. Ainsi, l'on peut prendre cette somme, ou cette différence, pour le vrai arc semidiurne de ce jour; & par conséquent, si l'on réduit cet arc en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, on a avec assez de précision, la vraie durée de la moitié de ce même jour. Mais, on ne peut en conclure qu'à quelque chose près, l'heure du lever du Soleil, & celle de son coucher; parce que les parties orientales des arcs diurnes ne sont point parfaitement égales aux parties occidentales des mêmes arcs.

Supposons pour exemple, que l'on veut sçavoir le temps que le Soleil a demeuré sur l'horison de Paris le 14. du mois de Mai de l'année 1749. On cherche dans quelques Ephémérides, ou par les Tables de M. De Cassini, quel étoit le lieu du Soleil au midi du jour proposé; & l'on trouve que ce lieu étoit le 23^{me} deg. 41 min. 39 sec. du 8 On cherche ensuite (a) la déclinaison 18 d. (a) N. 335. 43 m. 28 s. de ce point, & la différence ascendante 22 deg. 48 min. 37 sec. qui convient à cette déclinaison. Enfin, comme le point dont il s'agit est situé dans l'hémisphère septentrional, on ajoute cette différence à 90 deg. & l'on a 112 deg. 48 min. 37 sec. pour l'arc semidiurne de Paris, le 14. du mois de Mai de l'année 1749. Or, cet arc étant réduit en temps par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, donne 7 heures 31 min. 14 sec pour la vraie durée de la moitié de ce jour; & par conséquent, 15 h.

362 TRAITE' COMPLET

2 min. 28 sec. pour celle de ce jour entier : 4 h.
28 min. 46 sec. à peu de chose près, pour l'ins-
tant du lever du Soleil : & 7 h. 31 m. 14 s. aussi
à quelque chose près, pour celui de son coucher.

(a) N. 335.

Premièrement, (a)

Logarithme du sinus de l'obliquité de l'Ecliptique,
connue de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - 9.6002635
Logarithme du sinus du point de l'Ecliptique, pro-
posé de 53 deg. 41 min. 39 sec. - - - 9.9062639
Logarithme du sinus de la déclinaison demandée - 19.5065274

(b) N. 103. qui (b) donne 18 deg. 43 min. 28 sec. p. m. pour cette déclinaison.

(c) N. 347.

Secondement, (c)

Complément du logarithme de la tangente de la
hauteur de l'Equateur, donnée de 41 deg. 9 m.
50 sec. - - - 0.0583290
Logarithme de la tangente de la déclinaison du
point proposé, trouvée de 18 deg. 43 m. 28 s. 9530144
Logarithme du sinus de la différence ascensionnelle
demandée - - - 9.5884734

(d) N. 103. qui (d) donne 22 deg. 48 min. 37 sec. p. m. pour cette différence.

Troisièmement,

90 d. 0 m. 0 s.	- - - - -	6 h. 0 m. 0 s.
22 0 0	- - - - -	1 28 0
48 0 0	- - - - -	3 12
37 0 0	- - - - -	2
<hr/>		
Arc semid. 112. 48 37	H. du coucher. 7 31 14	
<hr/>		
12 h. 0 m. 0 s.	7 h. 31 m. 14 s.	
7 31 14	7 31 14	
<hr/>		
Heur. du lever. 4 28 46	Durée du jour. 15 2 28	

350. Mais si l'on veut déterminer rigoureu-
sement par le moyen des différences ascension-

nelles, les temps vrais du lever & du coucher du Soleil, il faut alors chercher ces temps de la manière dont nous allons le faire dans la Question suivante, que nous proposons pour exemple.

On demande quels ont été les temps vrais du lever & du coucher du Soleil à Paris, le 10. du mois d'Octobre de l'année 1749.

Pour résoudre cette Question, 1^{ent} on cherche par le moyen de quelques Ephémérides, ou par les Tables de M. De Cassini, quel étoit le lieu du Soleil le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du matin : quel étoit aussi le lieu du même Astre, le même jour à 6 heures du soir ; & l'on trouve le 26^{me} deg. 57 min. 46 sec. de la ♎, pour le premier ; & le 27^{me} deg. 27 min. 41 sec. du même signe, pour le dernier.

2^{ent} On cherche (a) la déclinaison du 26^{me} (a) N. 335. deg. 57 min. 46 sec. de la ♎ ; celle de son 27^{me} deg. 27 min. 41 sec. & l'on trouve que la première est de 10 deg. 24 min. 20 sec. & la dernière, de 10 deg. 35 min. 7 sec.

3^{ent} On cherche (b) la différence d'ascension- (b) N. 347. nelle qui convient à la première de ces deux déclinaisons ; la différence descendantelle † qui

† On appelle Descention droite d'un Astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphère droite descend sous l'horizon en même temps que le centre de cet astre. On appelle au contraire Descention oblique d'un Astre, le point de l'Equateur qui dans la Sphère oblique descend sous l'horizon en même temps que le centre de cet astre. Enfin, on appelle Différence descendantelle d'un Astre, l'arc de l'Equateur qui est compris entre la descention droite & la descention oblique de ce même astre.

convient à la dernière ; Et l'on trouve 12 deg. 7 min. 27 sec. pour cette différence ascensionnelle ; Et 12 deg. 21 min. 3 sec. pour cette différence descensionnelle.

^{4^{ent}} Comme les points dont il s'agit sont chacun dans l'hémisphère méridional , on retranche de 90 deg. chacune de ces différences ; Et il reste 77 deg. 52 min. 33 sec. pour la valeur de la partie orientale de l'arc diurne du jour proposé ; Et 77 deg. 39 min. 30 sec. pour la valeur de la partie occidentale du même arc.

^{5^{ent}} Enfin , après avoir réduit en temps chacune de ces valeurs , par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité , la différence 6 heures 48 m. 30 sec. du premier à 12 heures , est le temps vrai auquel le Soleil s'est levé sur l'horison de Paris le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. Et le dernier , 5 heures 10 min. 38 sec. est le temps vrai auquel le Soleil s'est couché ce même jour , sous le même horison.

(*) N. 335.

Premièrement , (a)

Logarithme du sinus de l'obliquité de l'Ecliptique ,
connue de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - -

Logar. du sinus du 26^e deg. 57 min. 46 sec. de la ~~2^e~~ 9.6002635
9.6564925

Log. du sinus de la première déclinaison demandée 29.2567560

(b) N. 103. qui (b) donne 10 d. 24 min. 20 sec. pour cette première déclinaison.

Logarithme du sinus de l'obliquité de l'Ecliptique ,
connue de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - -

Logar. du sinus du 27^{me} deg. 27 m. 41 s. de la ~~2^e~~ 9.6002635
9.6638429

Logar. du sin. de la dernière déclinaison demandée 29.2641064

(c) N. 103. qui (c) donne 10 deg. 35 min. 7 s. pour cette autre déclinaison.

DE TRIGONOMETRIE.

365

Secondement, (a)

(a) N. 147.

Complément du logarithme de la tangente de la hauteur de l'Equateur, donnée de 41 d. 9 m. 50 f. 0.0583290

Logarithme de la tangente de la première déclinaison trouvée de 10 deg 24 min. 20 sec. - 9.2639543

Log. du sinus de la diff. ascensionnelle demandée. 9.3222833

qui (b) donne 12 deg. 7 min. 27 sec. pour cette différence. (b) N. 103.

Complément du logarithme de la tangente de la hauteur de l'Equateur, donnée de 41 deg. 9 min. 50 sec. - 0.0583290

Logarithme de la tangente de la dernière déclinaison trouvée de 10 deg. 35 min. 7 sec. 9.2715603

Log. du sinus de la diff. descensionnelle demandée. 9.3298893

qui (c) donne 12 deg. 20 min. 30 sec. pour cette autre différence. (c) N. 103.

Troisièmement,

90 d. 0 m. 0 f.

12 7 27

77 52 33 Partie orient. de l'arc diurne.

70 d. 0 m. 0 f. - - - 4 h. 40 m. 0 f.

7 0 0 - - - 28 0

52 0 - - - 3 28

33 - - - 2

77 52 33 - - - 5 11 30

12 h. 0 m. 0 f.

5 11 30

6 48 30

Temps vrai du lever.

90 d. 0 m. 0 f.

12 20 30

77 39 30 Partie occid. de l'arc diurne.

70 d. 0 m. 0 f. - - - 4 h. 40 m. 0 f.

7 0 0 - - - 28 0

39 0 - - - 2 36

30 - - - 2

77 39 30 - - - 5 10 38

Temps vrai du coucher.

Or, on peut toujours de cette manière déterminer avec toute la précision possible les temps vrais : mais il n'en est pas de même des temps apparents ; & il faut les chercher par des voies toutes différentes de celles que nous venons de suivre. C'est pourquoi nous proposerons encore cette même question dans le huitième Usage, aux Nos 358. & 365. afin de l'y résoudre d'une manière dont on puisse également se servir pour trouver les temps vrais, comme pour connoître les temps apparents.

S C H O L I E III.

351. Enfin, ce que nous venons de dire des différences ascensionnelles des points de l'Ecliptique, soit pour trouver ces différences ; soit pour connoître par leur moyen le temps vrai que chacun de ces points demeure sur l'horison d'un certain lieu, convient pareillement aux différences ascensionnelles de tous les astres ; & l'on en construit ordinairement des Tables pour chaque différent degré de hauteur du Pôle.

V I. U S A G E.

352. Connoissant la hauteur du Pôle, l'obliquité de l'Ecliptique, & un point quelconque de ce cercle, trouver l'Ascension oblique de ce point.

* Fig. 157.
& 158.

On donne la hauteur OP^* du Pôle P sur l'horison HO , de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'obliquité AVC de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver l'ascension

oblique γB (Fig. 157.) ou γQEB (Fig. 158.)
du point C de ce cercle.

Solution. Cherchez (a) la déclinaison AC <sup>(a) N. 335.
342. & 347</sup> du point proposé C, son ascension droite γA (Fig. 157.), ou γQEA , (Fig. 158.), & sa différence ascensionnelle AB. Ensuite, si le point proposé décline vers le Pôle supérieur (Fig. 157.), retranchez sa différence ascensionnelle AB de son ascension droite γA : mais, s'il décline vers le Pôle inférieur (Fig. 158.), ajoutez au contraire sa différence ascensionnelle AB à son ascension droite γQEA ; & le reste γB (Fig. 157.), ou la somme γQEB (Fig. 158.), sera l'ascension oblique demandée.

VII. U S A G E.

353. *Connoissant la hauteur du Pôle, avec la déclinaison du Soleil, trouver l'Amplitude \dagger orientale de cet Astre, & l'Azimuth de son lever \S .*

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur <sup>* Fig. 157.
& 158.</sup> l'horison HO ; de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec la déclinaison AC du Soleil, de 12 deg. 19 min. 44 sec. & il faut trouver l'amplitude orientale BC de cet astre, avec l'azimuth HC de son lever.

\dagger On appelle *Amplitude* d'un Astre, l'arc de l'horison qui est compris entre le point du vrai orient, ou celui du vrai occident, & le point auquel cet astre se leve, ou celui auquel il se couche. On divise les Amplitudes en *orientales*, & en *occidentales* ; & on les subdivise en *septentrionales* & en *méridionales*.

\S Lorsqu'un astre est à l'horison, son azimuth est le complément de son amplitude. Voyez la seconde Note du N° 319.

- Solution.* Dans le triangle-Sphérique BCA qui est rectangle en A , on connoît l'angle ABC
- (a) N. 196. de 41 deg. 9 min 50 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la hauteur HE de l'Equateur EQ ; c'est-à-dire, le complément de la hauteur du Pôle P , qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 f. On connoît aussi le côté AC qui est donné de 12 deg. 19 min. 44 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (b), l'hypoténuse BC qui est l'amplitude demandée.
- (b) N. 264.

Complément du logarithme du sinus de l'angle ABC	
trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - -	0.1816322
Logarithme du sinus du côté AC donné de 12 deg.	
19 min. 44 sec. - - - -	9.3294446

Logarithme du sinus de l'amplitude demandée BC	9.5110768
--	-----------

- (c) N. 103. qui (c) donne 18 deg. 55 min 45 sec. p. m. pour la valeur de cette amplitude; laquelle étant ajoutée à 90 deg. lorsque le Soleil est dans les signes septentrionaux (Fig. 157), ou retranchée de 90 deg. lorsqu'il est dans les signes méridionaux (Fig. 158), donnera dans le premier cas, 108 deg. 55 min. 45 sec. & dans le dernier, 71 deg. 4 min. 15 sec. pour la valeur de l'azimuth demandé HC .

SCHOLIE I.

354. C'est en cherchant de cette manière les amplitudes tant orientales qu'occidentales d'un astre, que l'on connoît les vrais points de l'horizon par lesquels le centre de cet astre doit passer pour monter sur ce cercle, ou pour descendre au dessous. Mais ces points auxquels on trouve par le calcul précédent qu'un astre doit paroître à l'instant de son lever, ou à celui de son coucher, ne sont point ceux auxquels on apperçoit cet astre à

à ces instants ; parce que la réfraction faisant toujours paroître dans le ciel un objet plus élevé qu'il ne l'est en effet , la distance d'un astre au Pôle qui dans la Sphère oblique est élevé sur l'horison , est toujours plus petite au moment auquel on apperçoit cet astre à l'horison , qu'à celui auquel il y est effectivement. Par conséquent , les amplitudes apparentes sont plus grandes que les vraies amplitudes , dans l'hémisphère qui est du côté du Pôle élevé ; & plus petites au contraire , dans l'autre hémisphère. Or , pour faire voir comment on doit s'y prendre pour trouver ces amplitudes apparentes , nous allons résoudre la même Question précédente , en ayant égard aux effets que la réfraction produit.

355. Soit donc ¹ent le Soleil S^* situé dans l'hé- ^{* Fig. 259.} misphere septentrional , à 32 min. 20 sec. de profondeur sous l'horison HO , qui est la distance à laquelle la réfraction le fait paroître dans ce cercle. Soient en même temps , le cercle SCG le parallèle que le Soleil décrit ; l'arc PSD , une partie du cercle de déclinaison de cet astre ; & l'arc ZFS , une partie de son cercle vertical. Cela posé :

On a un triangle-Sphérique obliquangle SZP , dans lequel on connoit le côté ZFS de 90 deg. 32 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF & de la profondeur FS du Soleil , qui est donnée de 32 min. 20 sec. le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P ,

370 TRAITE' COMPLET

qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. & le côté PS de 77 deg. 40 min. 16 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison DS qui est aussi donnée de 12 deg. 19 min. 44 sec.

(a) N. 193. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle SZP de ce triangle.

Premièrement,

Valeur donnée du côté ZFS	-	-	90 d. 32 m. 20 f.
Valeur trouvée du côté ZP	-	-	41 9 50
Valeur trouvée du côté PS	-	-	77 40 16
Somme de ces trois côtés	-	-	209 22 26
Moitié de cette somme	-	-	104 41 13
Différence du côté ZFS à cette moitié	-	-	14 8 53
Différence du côté ZP à cette même moitié	-	-	63 31 23

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté ZFS	-	-	0.0000192
donné de 90 deg. 32 min. 20 sec.	-	-	
Complément du logarithme du sinus du côté ZP	-	-	0.1816322
trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	-	-	
Logarithme du sinus de la différence du côté ZFS,	-	-	9.3081516
trouvée de 14 deg. 8 min. 53 sec.	-	-	
Logarithme du sinus de la différence du côté ZP,	-	-	9.9518782
trouvée de 63 deg. 31 min. 23 sec.	-	-	
Logarithme du carré du sinus de la moitié de	-	-	19.5216812
l'angle demandé SZP, ou FZO	-	-	
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus	-	-	9.7608406
de la moitié de cet angle.	-	-	

- (b) N. 103. qui (b) donne 35 deg. 12 min. 31 sec. p. m. pour la valeur de cette moitié ; & par conséquent, 70 deg. 25 min. 2 sec. pour
 (c) N. 196. celle de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure le complément FO de l'amplitude demandée BF. Donc, cette amplitude est de 19 deg. 34 min. 58 sec. & surpasse par conséquent de 39 min. 13 sec.
 (d) N. 353. la vraie amplitude BC que l'on a trouvée par l'Usage précédent (d).

356. Soit en second lieu le Soleil S * situé * Fig. 160. dans l'hémisphère méridional, à 32^e deg. 20 m. de profondeur sous l'horison HO, qui, comme nous l'avons déjà dit, est la distance à laquelle la réfraction le fait paroître dans ce cercle. Soient aussi le cercle SCG le parallèle que le Soleil décrit; l'arc PDS, une partie du cercle de déclinaison de cet astre; & l'arc ZFS, une partie de son cercle vertical. Cela posé :

On a un triangle-Sphérique obliquangle SZP, dans lequel on connoît le côté ZFS de 90 deg. 32 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF & de la profondeur FS du Soleil, qui est donnée de 32 m. 20 sec. le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. & le côté PDS de 102 deg. 19 min. 44 sec. puisqu'enfin ce dernier côté est la somme du quart de cercle PD & de la déclinaison DS qui est aussi donnée de 12 deg. 19 min. 44 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle (a) N. 93. SZP de ce triangle.

Premièrement,

Valeur donnée du côté ZFS	-	-	90 d. 32 m. 20 s.
Valeur trouvée du côté ZP	-	-	41 9 50
Valeur trouvée du côté PDS	-	-	102 19 44
Somme de ces trois côtés	-	-	234 1 54
Moitié de cette somme	-	-	117 0 57
Différence du côté ZFS à cette moitié	-	-	26 28 37
Différence du côté ZP à cette même moitié	-	-	75 51 7

A a a ij

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté ZFS donné de 90 deg. 32 min. 20 sec. - - -	0.0000192
Complément du logarithme du sinus du côté ZP trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté ZFS, trouvée de 26 deg. 28 min. 37 sec. - - -	9.6491767
Logarithme du sinus de la différence du côté ZP, trouvée de 75 deg. 51 min. 7 sec. - - -	9.9866218
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SZP, ou FZO - - -	19.8174509
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle. - - -	9.9087254
(a) N. 103. qui (a) donne 54 deg. 8 min. 23 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 108 deg. 16 min. 46 sec. pour celle de cet angle.	
(b) N. 196. Or (b), cet angle a pour mesure l'arc OBF, qui est la somme de l'amplitude demandée BF & du quart du cercle OB. Donc, cette amplitude est de 18 deg. 16 min. 46 sec. & differe par consé- quent de 38 min. 59 sec. de la vraie amplitude BC que l'on a	
(c) N. 351. trouvée par l'Usage précédent (c).	

S C H O L I E II.

357. Après avoir trouvé de cette manière les amplitudes qui conviennent à chaque degré de déclinaison, suivant les différentes hauteurs du Pôle, on en construit des Tables qui sont d'un grand usage dans l'Astronomie ; & particulièrement dans la Navigation, où elles tiennent lieu d'une ligne méridienne qu'il n'est pas possible d'avoir sur la Mer.

VIII. USAGE.

358. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, trouver l'heure à laquelle

*le Soleil se leve un certain jour sur cet horison ;
& celle à laquelle il se couche le même jour sous
le même horison.*

ON demande quels ont été les temps vrais
du lever & du coucher du Soleil S* à Paris, * Fig. 161.
le 20 du mois d'Octobre de l'année 1749.

Solution. Après avoir connu par quelques
Ephémérides , ou par les Tables de M. De
Cassini , que le 20 du mois d'Octobre de l'an-
née 1749. le Soleil à 6 heures du matin étoit
au 26^{me} deg. 57 min. 46 sec. de la ☿ ; &
que le même jour à 6 heures du soir, il étoit
au 27^{me} deg. 27 min. 41 sec. du même signe,
on cherche (a) la déclinaison qui convient (a) N. 335.
à chacun de ces points ; & l'on trouve 1^{ent} que
celle qui convient au premier , est de 10 deg.
24 min. 20 sec. 2^{ent} que celle qui convient
au dernier , est de 10 deg. 35 min. 7 sec.
Cela posé :

Premièrement , dans le triangle-Sphérique
obliquangle SPZ, on connoît le côté PDS de
100 deg. 24 min. 20 sec. puisque ce côté est
la somme du quart de cercle PD & de la dé-
clinaison DS que l'on vient de trouver de 10
deg. 24 min. 20 sec. le côté PZ de 41 deg.
9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complé-
ment de la hauteur OP du Pôle P, qui est don-
née de 48 deg. 50 min 10 sec. & le côté ZS
de 90 deg. puisque ce côté est le vertical du
Soleil situé à l'horison HO. Ainsi, l'on cherche

374 **TRAITE' COMPLET**
 (a) N. 193. de la manière suivante (a), l'angle SPZ de ce triangle †.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté PDS	-	-	-	100	d.	24	m.	20	f.
Valeur trouvée du côté PZ	-	-	-	41		9		50	
Valeur donnée du côté ZS	-	-	-	90		0		0	
Somme de ces trois côtés	-	-	-	239		34		10	
Moitié de cette somme	-	-	-	119		47		5	
Différence du côté PDS à cette moitié	-	-	-	15		22		45	
Différence du côté PZ à cette même moitié	-	-	-	74		37		15	

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté PDS	trouvé de 100 deg. 24 min. 20 sec.	-	-	-	0.0071019
Complément du logarithme du sinus du côté PZ	trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	-	-	-	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PDS,	trouvée de 15 deg. 22 min. 45 sec.	-	-	-	9.4235825
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ,	trouvée de 74 deg. 37 min. 15 sec.	-	-	-	9.9841614
Logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle horaire demandé SPZ, ou DPE	-	-	-	-	19.5965800
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle	-	-	-	-	9.7982900

- (b) N. 103. qui (b) donne 38 deg. 56 min. 16 sec. ; pour la valeur de cette moitié ; & par conséquent, 77 deg. 52 min. 33 sec. pour celle
 (c) N. 196. de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure l'arc DE, qui étoit la partie orientale de l'arc diurne du jour proposé. Donc, cette partie étoit de 77 deg. 52 min. 33 sec. de même que nous l'avons trouvée au N° 350 ; & donne par conséquent de même, 6 heures 48 min. 30 sec. pour l'heure du lever du Soleil à Paris, le jour proposé.

† L'angle SPZ, ou DPE, s'appelle l'Angle horaire ; parce qu'il
 (d) N. 196. a pour mesure (d) l'arc DE de l'Equateur, qui est la distance du Soleil au Méridien HZO.

DE TRIGONOMETRIE. 375

Secondement, dans le triangle - Sphérique obliquangle sPZ , on connoît le côté Pds de 100 deg. 35 min. 7 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle Pd & de la déclinaison ds , que l'on a trouvée de 10 deg. 35 min. 7 sec. le côté PZ que l'on a déjà trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. & le côté Zs de 90 deg. par la même raison que dans le triangle précédent. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle sPZ de ce triangle. (a) N. 193.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté Pds	-	-	-	100	d.	35	m.	7	s.
Valeur trouvée du côté PZ	-	-	-	41	.	9		50	
Valeur donnée du côté Zs	-	-	-	90		0		0	
Somme de ces trois côtés	-	-	-	231		44		57	
Moitié de cette somme	-	-	-	115		52		28	$\frac{1}{2}$
Différence du côté Pds à cette moitié	-	-	-	15		17		21	$\frac{1}{2}$
Différence du côté PZ à cette même moitié	-	-	-	74		42		38	$\frac{1}{2}$

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté Pds trouvé de 100 deg. 35 min. 7 sec.	-	-	-	0.0074542
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	-	-	-	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté Pds , trouvée de 15 deg. 17 min. 21 sec. $\frac{1}{2}$	-	-	-	9.4210985
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ , trouvée de 74 deg. 42 min. 38 sec. $\frac{1}{2}$	-	-	-	9.9843502
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle horaire demandé sPZ , ou dPE	-	-	-	19.5945351
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle.	-	-	-	9.7972675

qui (b) donne 38 deg. 49 min. 45 sec. pour la valeur de cette (b) N. 103. moitié; & par conséquent, 77 deg. 39 min. 30 sec. pour celle de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure l'arc Ed , qui étoit (c) N. 196. la partie occidentale de l'arc diurne du jour proposé. Donc,

376 TRAITE' COMPLET

cette partie étoit de 77 deg. 39 min. 30 sec. de même que nous l'avons trouvée au N 350; & donne par conséquent de même, 5 heures 10 min. 38 sec. pour l'heure du coucher du Soleil à Paris, le même jour proposé.

SCHOLIE I.

* Fig. 161. 359. Quoique les triangles SPZ * & sPZ soient quadrantaux, & suivent par conséquent les mêmes loix que les triangles-Sphériques rectangles, nous les avons cependant considérés comme étant seulement obliquangles, afin de mettre le plus d'uniformité qu'il nous est possible, dans notre manière de résoudre les triangles-Sphériques.

SCHOLIE II.

* Fig. 161. 360. Au lieu de résoudre, comme nous venons de le faire, le triangle SPZ *, pour connoître l'angle SPZ, & le triangle sPZ, pour connoître l'angle sPZ; on peut trouver ces mêmes angles en résolvant les triangles SPO & sPO, de la manière suivante qui est la plus courte.

^{1^{re}} Dans le triangle-Sphérique SPO qui est rectangle en O, on connoît le côté OP qui est donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'hypoténuse PDS que l'on a trouvée de 100 deg. 24 m. 20 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière sui-

(a) N. 281. vante (a), l'angle SPO.

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté OP donné de 48 d. 50 m. 10 s.	0.0583290
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PDS trouvée de 100 deg. 24 m. 20 s.	9.2639543

Logar. du sinus du complément de l'angle SPO	9.3222833
--	-----------

(b) N. 103. qui (b) donne 12 deg. 7 min. 27 sec. pour la valeur de ce complément

DE TRIGONOMETRIE. 377

ment ; & par conséquent , 102 deg. 7 min. 27 sec. pour celle de cet angle , qui est obtus (a). Or , puisque l'angle SPO est de (a) N. 225. 102 deg. 7 min. 27 sec. l'angle SPZ qui en est le supplément , est de 77 deg. 52 min. 33 sec. de même que nous l'avons trouvé par le N° 358.

2^{ent} Dans le triangle-Sphérique SPO qui est aussi rectangle en O , on connoit le côté OP qui est donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'hypoténuse Pds que l'on a trouvée de 100 deg. 35 min. 7 sec. Ainsi , l'on cherche de la manière suivante (b) , l'angle SPO.

(b) N. 281.

Complément du logar. de la tangente du complément du côté OP donné de 48 d. 50 m. 10 s.	0.0583290
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse Pds trouvée de 100 d. 35 m. 7 s.	9.2715603

Logar. du sinus du complément de l'angle SPO - 9.3298893

qui (c) donne 12 deg. 20 min. 30 sec. pour la valeur de ce (c) N. 103. complément ; & par conséquent , 102 deg. 20 min. 30 sec. pour celle de cet angle , qui est obtus (d). Or , puisque l'angle SPO est (d) N. 225. de 102 deg. 20 min. 30 sec. l'angle SPZ qui en est le supplément , est de 77 deg. 39 min. 30 sec. de même que nous l'avons aussi trouvé par le N° 358.

SCHOLIE III.

361. Si le Soleil étoit dans l'hémisphère septentrional , on trouveroit de la même manière l'heure de son lever , & celle de son coucher. Mais les côtés PDS* & Pds des triangles SPZ & * Fig. 161. SPZ , qui dans l'exemple que nous venons de proposer , sont les sommes , l'un du quart de cercle PD & de la déclinaison DS , & l'autre , du quart de cercle Pd & de la déclinaison ds , seroient alors les différences PS* & Ps de ces déclinaisons * Fig. 162. à ces mêmes quarts de cercles.

B b b

. SCHOLIE IV.

362. Si l'on retranche de 180 deg. chaque
 * Fig. 161. partie DE * & Ed de l'arc DEd diurne, que
 l'on vient de trouver, l'une de 77 deg. 52 min.
 33 sec. & l'autre de 77 deg. 39 min. 30 sec.
 les restes 102 deg. 7 min. 27 sec. & 102 deg.
 20 min. 30 sec. sont les valeurs, l'un de la
 partie orientale DQ de l'arc nocturne DQd; &
 l'autre, de la partie occidentale dQ, de ce même
 arc.

SCHOLIE V.

363. Si après avoir ajouté ensemble les deux
 * Fig. 161. parties DE * & Ed de l'arc diurne DEd, on prend
 la moitié 77 deg. 46 min. 1 sec. $\frac{1}{2}$ de leur somme
 155 deg. 32 min 3 sec cette moitié est la va-
 leur de l'arc semidiurne de Paris, pour le 20.
 du mois d'Octobre de l'année 1749. telle qu'on
 l'auroit trouvée, si on l'avoit cherchée pour le lieu
 du Soleil au midi de ce jour. Voyez le N° 349.

SCHOLIE VI.

364. Si après avoir retranché de 12 heures
 l'heure à laquelle le Soleil s'est levé à Paris, le
 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. on ajcûte
 le reste 5 heures 11 min. 30 sec. à l'heure à la-
 quelle il s'est couché, la somme 10 heures 22 m.
 8 sec. est la vraie durée de ce jour; c'est-à-dire,
 le temps que le Soleil a employé ce jour-là à
 parcourir l'hémisphere supérieur: & si l'on re-

tranche de 24 heures cette même somme, le reste 13 heures 37 min. 52 sec. est la durée de la nuit ; c'est-à-dire, le temps que le Soleil a employé à parcourir l'hémisphère inférieur.

SCHOLIE VII.

365. Les temps que nous venons d'enseigner à trouver dans cet Usage (a), sont les temps vrais ; (a) N. 358. c'est à-dire, ceux auxquels le centre du Soleil est effectivement à l'horison. Mais, comme il faut aussi connoître ceux auxquels il doit y paroître, nous allons reprendre la même Question que nous venons de proposer ; & chercher ces derniers temps, au lieu des premiers que nous avons entrepris d'abord de trouver.

366. Soit donc ^{1^{ent}}, le Soleil S* enfoncé sous* Fig. 160. l'horison oriental HO, de 32 min. 20 sec. qui est la distance à laquelle la réfraction le fait paroître dans ce cercle. Soit en même temps sa déclinaison DS trouvée de la même manière qu'au N° 350, de 10 deg. 24 min. 20 sec. pour le 10. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du matin. Cela supposé :

Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PDS de 100 deg. 24 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle PD, & de la déclinaison DS que l'on a trouvée de 10 deg. 24 min. 20 sec. le côté PZ, de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. & le côté

B b b ij

380 TRAITE' COMPLET

ZFS, de 90 deg. 32 min. 20 sec. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF, & de la profondeur FS du Soleil, qui est aussi donnée de 32 min. 20 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière

(a) N. 193. suivante (a), l'angle SPZ de ce triangle.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté PDS	- - -	100 d.	24 m.	20 c.
Valeur trouvée du côté PZ	- - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté ZFS	- - -	90	32	20
Somme de ces trois côtés	- - -	232	6	30
Moitié de cette somme	- - -	116	3	15
Différence du côté PDS à cette moitié	-	15	38	55
Différence du côté PZ à cette même moitié	-	74	53	25

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté PDS	trouvé de 100 deg. 24 min. 20 sec.	- -	0.0072019
Complément du logarithme du sinus du côté PZ	trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	- -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PDS,	trouvée de 15 deg. 38 min. 55 sec.	- -	9.4309403
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ,	trouvée de 74 deg. 53 min. 25 sec.	- -	9.9847201
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé SPZ, ou DPE	- - -	- -	19.6044945
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle.	- - -	- -	9.8022472

- (b) N. 103. qui (b) donne 39 deg. 21 min. 46 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 78 deg. 43 min. 32 sec. pour celle
- (c) N. 196. de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure l'arc DE qui étoit la partie orientale de l'arc diurne du jour proposé. Donc, cette partie étoit de 78 deg. 43 min. 32 sec. Mais, 78 deg. 43 min. 32 sec. de l'Equateur étant réduits en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, produisent 5 heures 14 min. 54 sec. Donc, si de 12 heures on retranche 5 heures 14 min. 54 sec. le reste 6 heures 45 min. 6 sec. est le temps auquel le Soleil a paru se lever à Paris le jour proposé; & par conséquent, le matin de ce jour, le temps apparent a précédé de 3 min. 24 sec. le temps vrai que nous avons trouvé par le N° 358.

367. Soit en second lieu le Soleil s * des- * Fig. 160.
cendu sous l'horison occidental HO, de 32 min.
20 sec. qui est aussi la distance à laquelle la ré-
fraction le fait disparaître. Soit aussi sa déclinaï-
son ds trouvée de la même manière qu'au N° 350,
de 10 deg. 35 min. 7 sec. pour le 20 du mois
d'Octobre de l'année 1749, à 6 heures du soir.
Cela supposé :

Dans le triangle Sphérique obliquangle sPZ,
on connoît le côté Pds de 100 deg. 35 min. 7 sec.
puisque ce côté est la somme du quart de cercle Pd,
& la déclinaïson ds que l'on a trouvée de 10 deg.
35 min. 7 sec. le côté PZ qui de même que dans
le triangle précédent, est le complément 41 deg.
9 min. 50 sec. de la hauteur OP du Pôle P,
qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. &
le côté Zfs, de 90 deg. 32 min. 20 sec. puisque
ce côté est la somme du quart de cercle Zf, & de
la profondeur fs du Soleil, qui est aussi donnée
de 32 min. 20 sec. Ainsi, l'on cherche encore
de la manière suivante (a), l'angle sPZ de ce (a) N. 293.
dernier triangle.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté Pds	-	-	-	100 d.	35 m.	7 s.
Valeur trouvée du côté PZ	-	-	-	41	9	50
Valeur trouvée du côté Zfs	-	-	-	90	32	20
Somme de ces trois côtés	-	-	-	232	17	17
Moitié de cette somme	-	-	-	116	8	38½
Différence du côté Pds à cette moitié	-	-	-	15	33	31½
Différence du côté PZ à cette même moitié	-	-	-	74	58	48½

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté Pds	
trouvé de 100 deg. 35 min. 7 sec.	0.0074542
Complément du logarithme du sinus du côté PZ	
trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté Pds,	
trouvée de 15 deg. 33 min. 31 sec. $\frac{1}{2}$	9.4285013
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ,	
trouvée de 74 deg. 58 min. 48 sec. $\frac{1}{2}$	9.9849034
Logarithme du quarré du sinus de la moitié de	
l'angle demandé sPZ, ou dPE	19.6024911
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus	
de la moitié de cette angle.	9.8012455

- (a) N. 103. qui (a) donne 39 d. 15 m. 17 s. pour la valeur de cette moitié; & par
 (b) N. 196. conséquent, 78 d. 30 m. 34 s. pour celle de cet angle. Or (b), cet
 angle a pour mesure l'arc Ed, qui étoit la partie occidentale
 de l'arc diurne du jour proposé. Donc, cette partie étoit de 78 deg.
 30 min. 34 sec. Mais, 78 deg. 30 min. 34 sec. de l'Equateur
 étant réduits en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de
 ce Traité, produisent 5 h. 14 m. 2 s. Donc, le 20. du mois d'Octo-
 bre de l'année 1749. le Soleil a paru se coucher sous l'horison de
 Paris, à 5 heures 14 min. 2 sec. & par conséquent, le soir de
 ce jour, le temps vrai que nous avons trouvé par le N° 358.
 a précédé de 3 min. 24 sec. le temps apparent.

S C H O L I E VIII.

368. Ce que nous avons dit dans les Scho-
 lies 3, 4, 5 & 6, convient pareillement à la
 septieme.

S C H O L I E IX.

369. Enfin, c'est en cherchant de la manière
 dont nous venons de le faire dans la septième
 Scholie, les heures apparentes du lever du Soleil
 & de son coucher pour chaque jour de l'année,
 que l'on en construit des Tables telles qu'on les
 trouve ordinairement dans les Ephémérides, &
 dans la plus grande partie de nos Calendriers.

IX. USAGE.

370. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, trouver l'heure à laquelle l'Aurore commence à paroître un certain jour, sur cet horison ; & celle à laquelle le Crépuscule y finit le même jour.

ON demande l'heure à laquelle l'Aurore a commencé à paroître sur l'horison de Paris, le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. & celle à laquelle le Crépuscule a fini le même jour, sur le même horison.

Solution. On a remarqué que cette foible lumière qui précède le lever du Soleil, & qui dure encore quelque temps après son coucher, ne commence à paroître, & ne s'éteint entièrement, que lorsque le Soleil est enfoncé de 18 degrés dans l'hémisphère inférieur. Ainsi, soit ^{1^{ent}} le Soleil S * situé dans cet hémisphère, * Fig. 160. à 18 deg. de profondeur sous l'horison oriental HO. Soit aussi sa déclinaison DS trouvée de la même manière qu'au N° 350, de 10 d. 24 min. 20 sec. pour le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du matin. Cela supposé :

Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PDS de 100 d. 24 m. 20 s. puisque ce côté est la somme du quart de cercle PD, & de la déclinaison DS que l'on a trouvée de 10 deg. 24 min. 20 sec. le côté PZ, de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le com-

§ 84 TRAITE' COMPLET

plément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. & le côté ZFS, de 108 deg. puisque ce côté est la somme du quart de cercle ZF, & de la profondeur FS du Soleil, qui est aussi donnée de 18 deg. Ainsi, (a) N. 293. l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle SPZ de ce triangle.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté PDS	-	-	-	100 d. 24 m. 20 f.
Valeur trouvée du côté PZ	-	-	-	41 9 50
Valeur trouvée du côté ZFS	-	-	-	108 0 0
Somme de ces trois côtés	-	-	-	249 34 10
Moitié de cette somme	-	-	-	124 47 5
Différence du côté PDS à cette moitié	-	24	22	45
Différence du côté PZ à cette même moitié	-	83	37	15

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté DPS	trouvé de 100 deg. 24 m. 20 sec.	-	-	-	0.0072019
Complément du logarithme du sinus du côté PZ	trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	-	-	-	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PDS,	trouvée de 24 deg. 22 min. 45 sec.	-	-	-	9.6157115
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ,	trouvée de 83 deg. 37 min. 15 sec.	-	-	-	9.9973026
Logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle demandé SPZ, ou DPE	-	-	-	-	19.8018482
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle	-	-	-	-	9.9009241

(b) N. 103. qui (b) donne 52 deg. 45 min. 6 sec. pour la valeur de cette moitié ; & par conséquent, 105 deg. 30 min. 12 sec. pour celle (c) N. 196. de cet angle. Or (c), cet angle a pour mesure l'arc DE. Donc, l'arc DE est de 105 deg. 30 min. 12 sec. & par conséquent, si après avoir réduit cet arc en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, on retranche de 12 heures le temps qu'il produit, le reste 4 heures 58 min. est l'instant auquel l'Aurore a commencé à paroître sur l'horizon de Paris, le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749.

SOIENT

DE TRIGONOMETRIE. 385

SOIENT en second lieu le Soleil s^* enfoncé * Fig. 16a. de 18 deg. sous l'horison occidental HO; & la déclinaison ds trouvée de la même manière qu'au N° 350, de 10 deg. 35 min. 7 sec. pour le 20. du mois d'Octobre de l'année 1749. à 6 heures du soir. Cela encore supposé :

Dans le triangle-Sphérique obliquangle sPZ , on connoît le côté Pds de 100 deg. 35 min. 7 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. & le côté Zfs de 108 deg. par les mêmes raisons que nous avons dites dans la résolution du triangle précédent. Ainsi, l'on cherche aussi de la manière suivante (a), l'angle sPZ .

(a) N. 293.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté Pds	- - - -	100 d.	35 mi.	7 s.
Valeur trouvée du côté PZ	- - - -	41	9	50
Valeur trouvée du côté Zfs	- - - -	108	0	0
Somme de ces trois côtés	- - - -	249	44	57
Moitié de cette somme	- - - -	124	52	28½
Différence du côté Pds à cette moitié	- -	24	17	21½
Différence du côté PZ à cette même moitié	83	42	38½	

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté Pds trouvé de 100 deg. 35 min. 7 sec.	- -	0.0074542
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	- -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté Pds , trouvée de 24 deg. 17 min. 21 sec.½	- -	9.6142055
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ , trouvée de 83 deg. 42 min. 38 sec.½	- -	9.9973782

Logarithme du quarré du sinus de la moitié de l'angle demandé sPZ , ou dPE	- -	19.8006699
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle	- -	9.9003349

qui (b) donne 52 deg. 38 min. 59 sec. p. m. pour la valeur (b) N. 293.

C C C

de cette moitié; & par conséquent, 105 deg. 17 min. 58 sec. pour celle de cet angle. Or (a), cet angle a pour mesure l'arc Ed. Donc, l'arc Ed est de 105 deg. 17 min. 58 sec. & par conséquent, puisque 105 deg. 17 min. 58 sec. de l'Equateur étant réduits en temps, par le moyen de la Table qui est à la fin de ce Traité, produisent 7 heures & min. 11 sec. il étoit 7 heures 1 min. 11 sec. lorsque le Crépuscule a fini à Paris, le 10. du mois d'Octobre de l'année 1749.

SCHOLIE I.

371. Si le Soleil étoit dans les Signes septentrionaux, on trouveroit de la même manière le commencement de l'Aurore & la fin du Crépuscule. Mais les côtés PDS * & Pds des triangles SPZ & sPZ, qui dans l'exemple que nous venons de proposer, sont les sommes, l'un du quart de cercle PD & de la déclinaison DS, & l'autre du quart de cercle Pd & de la déclinaison ds, seroient alors les différences de ces déclinaisons à ces mêmes quarts de cercles.

SCHOLIE II.

372. C'est par des calculs pareils à ceux que nous venons de faire dans cet Usage, que l'on construit des Tables des heures auxquelles l'Aurore commence & le Crépuscule finit, chaque jour de l'année.

X. USAGE.

373. Connoissant la déclinaison du Soleil, sa hauteur sur l'horison, & celle du Pôle sur le même horison, trouver quelle heure il est.

ON donne la déclinaison DS* du Soleil S. Fig. 163.
de 18 deg. 52 min. 20 sec. vers le septentrion ;
la hauteur FS sur l'horison HO , de 35 deg.
25 min. avec la hauteur OP du Pôle P sur le
même horison , de 48 deg 50 min. 10 sec. &
il faut trouver quelle heure il est ; c'est-à-dire,
la distance DE du Soleil au Méridien HZO.

Solution. Dans le triangle-Sphérique obli-
quangle SPZ, on connoît le côté PS de 71 deg.
7 min. 40 sec. puisque ce côté est le complé-
ment de la déclinaison DS qui est donnée de
18 deg. 52 min. 20 sec. le côté PZ, de 41 deg.
9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complé-
ment de la hauteur OP du Pôle P, qui est don-
née de 48 deg. 50 min. 10 sec. & le côté SZ,
de 54 deg. 35 min. puisque ce côté est le com-
plément de la hauteur FS du Soleil, qui est aussi
donnée de 35 deg. 25 min. Ainsi, l'on cher-
che de la manière suivante (a), l'angle SPZ de (a) N. 293.
ce triangle.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté PS	-	-	-	-	71 d.	7 m.	40 s.
Valeur trouvée du côté PZ	-	-	-	-	41	9	50
Valeur trouvée du côté SZ	-	-	-	-	54	35	0
<hr/>							
Somme de ces trois côtés	-	-	-	-	166	52	30
Moitié de cette somme	-	-	-	-	83	26	15
Différence du côté PS à cette moitié	-	-	-	-	12	18	35
Différence du côté PZ à cette même moitié	-	-	-	-	42	16	25

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté PS trouvé de 71 deg. 7 min. 40 sec.	- - -	0.0239977
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 10 sec.	- - -	0.1816322
Logarithme du sinus de la différence du côté PS, trouvée de 12 deg. 18 min. 35 sec.	- - -	9.3287793
Logarithme du sinus de la différence du côté PZ, trouvée de 42 deg. 16 min. 25 sec.	- - -	9.8278032
<hr/>		
Logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle demandé SPZ, ou DPE	- - -	19.3622124
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle	- - -	9.6811062

- (a) N. 103. qui (a) donne 28 deg. 40 min. 32 sec. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 57 deg. 21 min. 4 sec. pour celle
- (b) N. 196. de cet angle; c'est-à-dire, pour celle de l'arc DE qui (b) en est la mesure. Or, cette dernière valeur étant réduite en temps, produit 3 heures 49 min. 24 sec. Ainsi, il est 3 heures 49 min. 24 sec. après midi, si le Soleil est dans l'hémisphère occidental, & 8 heures 10 min. 36 sec. du matin, si le Soleil est dans l'autre hémisphère.

S C H O L I E I.

374. Si le Soleil étoit dans l'hémisphère méridional, on trouveroit de la même manière sa distance au Meridien. Mais le côté PS * du triangle SPZ, qui dans l'exemple que nous venons de proposer, est la différence de la déclinaison DS au quart de cercle PD, seroit alors
- * Fig. 163. la somme PDS * de cette déclinaison & de ce même quart de cercle.

375. Mais, si le Soleil étoit dans l'Equateur, la résolution de ce Problème deviendroit très-facile, puisqu'il ne s'agiroit alors que de
- * Fig. 163. trouver le côté sE * du triangle-Sphérique sZE

qui seroit rectangle en E, & dans lequel on connoitroit le côté ZE qui est toujours égal à la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée; avec l'hypoténuse SZ qui seroit le complément de la hauteur fs du Soleil, qui est aussi donnée.

Ainsi, si l'on demande quelle heure il est, par exemple à Paris, lorsque le Soleil étant dans l'Equateur, il se trouve élevé de 32 deg. 27 m. sur l'horison de cette Ville; on connoît dans le triangle-Sphérique sZE qui est rectangle en E, le côté ZE de 48 deg. 50 min. 10 sec. puisque le Pôle est élevé de ce nombre de degrés sur l'horison de Paris, avec l'hypoténuse sZ de 57 deg. 33 m. puisque cette hypoténuse est le complément de la hauteur fs qui est donnée de 32 deg. 27 min.

Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), (a) N. 272. le côté sE de ce triangle.

Complément du logarithme du sinus du complément du côté ZE donné de 48 deg. 50 min. 10 s. 0.1816322

Logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse sZ trouvée de 57 deg. 33 min. - - - 9.7296211

Logarithme du sinus du complément du côté demande sE - - - 9.9112533

qui (b) donne 54 deg. 36 min. 18 sec. p. m. pour la valeur de ce (b) N. 103. complément; & par conséquent, 35 deg. 23 min. 42 sec. pour celle de ce côté. Or, cette dernière valeur étant réduite en temps, produit 2 h. 21 m. 34 s. Ainsi, il est à Paris 2 h. 23 m. 34 s. après midi, à l'instant proposé, si le Soleil est dans l'hémisphère occidental; & 9 heures 38 m. 26 s. du matin, s'il est dans l'autre hémisphère.

SCHOLIE II

376. Si au lieu de donner la hauteur du Soleil sur l'horison, on donnoit sa profondeur fs * sous * Fig. 164.

le même horison, cela ne changeroit rien à la manière de chercher sa distance au Méridien; puisqu'il seroit pareillement question de trouver
 (a) N. 193. (a) la valeur de l'angle SPZ du triangle-Sphérique obliquangle SPZ , dont on connoitroit tous les côtés Ps , PZ & Zfs .

On pourroit aussi chercher de la manière dont nous venons de le faire dans cet Usage, quelle est la distance du Soleil au Méridien HZO , lorsque sa hauteur sur l'horison HO est égale à la profondeur donnée fs ; & cette distance seroit égale à celle de cet Astre au Méridien HNO , qui est celle que l'on cherche.

Enfin, on pourroit en renversant la Sphère, prendre la profondeur fs du Soleil sous l'horison HO par sa hauteur sur le même horison; & chercher immédiatement sa distance au Méridien HNO , par rapport au Nadir N , qui deviendroit alors le Zénith, & au Pôle p , de la même manière dont nous l'avons fait dans cet Usage, par rapport au Zénith Z , & au Pôle P .

XI. USAGE.

377: Connoissant l'Azimuth du Soleil, sa déclinaison, & sa hauteur sur l'horison, trouver quelle heure il est.

* Fig. 165. ON donne l'Azimuth HF * du Soleil, de 46 deg. 25 min. sa déclinaison DS de 18 deg. 53 min. vers le septentrion; avec sa hauteur FS sur l'horison HO , de 52 deg. 41 min. 3 sec.

& il faut trouver quelle heure il est ; c'est-à-dire, la distance DE de cet Astre au Méridien HZO.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique SPZ, on connoît le côté PS de 71 d. 7 min. puisque ce côté est le complément de la déclinaison DS, qui est donnée de 18 deg. 53 min. le côté ZS de 37 deg. 18 min. 57 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur FS du Soleil, qui est donnée de 52 deg. 41 min. 3 f. & l'angle SZP, ou FZP, de 133 d. 35 min. puisque cet angle est le supplément de l'angle FZH, dont la mesure FH est aussi donnée de 46 deg. 25 min. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle SPZ. (a) N. 289.

Complément du logarithme du sinus du côté PS trouvé		
de 71 deg. 7 min.	-	0.0240164
Logarithme du sinus du côté ZS trouvé de 37 deg.		
18 min. 57 sec.	-	9.7826218
Logarithme du sinus de l'angle SZP trouvé de 133		
deg. 35 min.	-	9.8599619
Logarithme du sinus de l'angle demandé SPZ,		
ou DPE	-	29.6666101

qui (b) donne 27 deg. 39 min. 7 sec. p. m. pour la valeur de (b) N. 103. cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'arc DE qui (c) (c) N. 195. en est la mesure. Or, cette valeur étant réduite en temps, produire 1 heure 50 min. 36 sec. Ainsi, il est 1 heure 50 min. 36 sec. après midi, à l'instant proposé, si le Soleil est dans l'hémisphère occidental ; & 10 heures 9 min. 24 sec. du matin, s'il est dans l'autre hémisphère.

SCHOLIE I.

378. Si au lieu de donner la hauteur FS * * Fig. 165. du Soleil sur l'horison HO, on avoit donné la

hauteur OP du Pôle P sur le même horison, ~~est~~
 48 deg. 50 min. 10 sec. on auroit alors connu
 dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, le
 côté PS de 71 deg. 7 min. puisque ce côté auroit
 été le même que dans cet Usage; le côté PZ, de
 41 deg. 9 min. 50 sec. puisqu'il auroit été le
 complément de cette hauteur donnée OP; & l'an-
 gle SPZ de 133 deg. 35 min. puisqu'il auroit
 aussi été le même que dans ce même Usage. Ainsi,
 (a) N. 197. il auroit fallu (a) supposer qu'un arc PM d'un
 grand cercle auroit été tiré du sommet de l'an-
 gle P perpendiculairement au côté SZ, (prolongé
 vers M, parce que les angles PSZ & PZS sont
 de différente espece); & l'on auroit ensuite cherché
 de la manière suivante, l'angle SPZ.

1^{er} dans le triangle-Sphérique MPZ qui [c]
 auroit été rectangle en M, on auroit connu
 l'angle PZM de 46 deg. 25 min. puisque cet
 angle auroit été le supplément de l'angle SZP
 que l'on auroit trouvé de 133 deg. 35 min. avec
 l'hypoténuse PZ que l'on auroit aussi trouvée de
 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on auroit cher-
 (b) N. 283. ché de la manière suivante (b), l'angle ZPM.

Complément du logarithme du sinus du complé- ment de l'hypoténuse PZ trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec.	-	-	0.1233031
Logarithme de la tangente du complément de l'an- gle PZM trouvé de 46 deg. 25 min.	-	-	9.9785149
Logarithme de la tangente de l'angle ZPM	-	10.1018180	

(c) N. 103. qui (c) auroit donné 51 deg. 39 min. 21 sec. pour la valeur de cet
 angle.

^{2^{en}} Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on auroit connu le côté PZ qui auroit été trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. le côté PS qui auroit aussi été trouvé de 71 deg. 7 m. & l'angle au sommet ZPM qui viendrait d'être trouvé de 51 deg. 39 min. 21 sec. Ainsi, l'on auroit cherché de la manière suivante (a), l'autre angle au N. 303. sommet SPM.

Complément du logarithme de la tangente du complément du côté PZ trouvé de 41 d. 9 m. 50 s.	9.9416710
Logarithme de la tangente du complément du côté PS trouvé de 71 deg. 7 min.	9.5340916
Logar. du sinus du complément de l'angle ZPM trouvé de 51 deg. 39 min. 21 sec.	9.7926604

Logar. du sinus du complément de l'angle SPM 29.2684230

qui (b) auroit donné 10 deg. 41 min. 32 sec. pour la valeur de ce (b) N. 203. complément ; & par conséquent , 79 deg. 18 min. 28 sec. pour celle de cet angle , de laquelle ayant retranché la valeur de l'angle ZPM, qui viendrait d'être trouvée de 51 d. 39 m. 21 s. il auroit resté 27 deg. 39 min. 7 sec. pour celle de l'angle demandé SPZ.

SCHOLIE II.

379. Si le Soleil étoit dans l'hémisphère méridional, cela ne changeroit rien à la manière de résoudre cette Question. Mais le côté PS * du Fig. 163. triangle SPZ, qui dans l'exemple que nous venons de proposer est la différence de la déclinaison DS au quart de cercle PD, seroit alors la somme PDS * de cette déclinaison & de ce Fig. 164. même quart de cercle.

XII. USAGE.

380. Connoissant la déclinaison du Soleil, sa
D d d

396 TRAITE' COMPLET

2^{ent} Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le segment PM que l'on vient de trouver de 23 deg. 36 min. 47 sec. le segment MS que l'on vient aussi de trouver de 47 deg. 42 min. 9 sec. & le côté PZ que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi, (a) N. 303. l'on cherche de la manière suivante (a), l'autre côté SZ.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment PM trouvé de 23 deg. 36 min. 47 sec.	0.0379759
Logarithme du sinus du complément du segment MS trouvé de 47 deg. 42 min. 9 sec.	9.8280022
Logarithme du sinus du complément du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	9.8766962
Logar. du sinus du complément du côté SZ	12.7426750

(b) N. 103, qui (b) donne 33 deg. 34 min. 7 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la hauteur demandée FS, puisque cette hauteur est ce complément même.

SCHOLIE I.

381. 1^{ent} Si le Soleil étoit dans l'hémisphère méridional, on trouveroit de la même manière sa hauteur sur l'horison. Mais le côté PS * du triangle SPZ, qui dans l'exemple que nous venons de proposer, est la différence de la déclinaison DS au quart de cercle PD, seroit alors la somme PDS * de cette déclinaison & de ce même quart de cercle.

382. 2^{ent} Si le Soleil étoit dans l'Equateur, la résolution de ce Problème deviendroit très-facile; puisqu'il ne s'agiroit alors que de trou-

DE TRIGONOMETRIE. 395

de 18 deg. 41 min. 4 sec. & l'angle SPZ, ou DPE, de 60 deg. puisque la distance DE du Soleil au Méridien HZO, qui (a) en est la (a) N. 196. mesure, est donnée de 4 heures qui répondent à 60 deg. de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) qu'un arc ZM † d'un grand cercle (b) N. 197. est tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au cercle horaire PD, c'est-à-dire au côté PS, on cherche de la manière suivante, le côté SZ.

1^{ent} Dans le triangle-Sphérique PZM qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse PZ que l'on a trouvée de 41 deg. 9 min. 50 f. & l'angle MPZ, ou SPZ, que l'on a aussi trouvé de 60 deg. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le segment PM. (c) N. 184.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle MPZ trouvé de 60 deg. - - - - 0.3010300

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PZ trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec. 10.0583290

Logar. de la tang. du complément du segment PM 10.3593590

qui (d) donne 66 deg. 23 min. 13 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 23 deg. 36 min. 47 sec. pour (d) N. 103. celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté PS que l'on a trouvé de 71 deg. 18 min. 56 sec. laisse 47 deg. 42 min. 9 sec. pour la valeur du segment MS.

† Cet arc passe dans le triangle SPZ, tant que l'angle horaire SPZ est plus petit qu'un angle droit; c'est-à-dire, tant qu'il n'y a pas 6 heures de différence entre l'heure donnée & midi. Mais, lorsque cette différence est de plus de 6 heures, cet angle devient obtus, & l'arc perpendiculaire ZM qui tombe alors hors du triangle SPZ, rencontre le cercle horaire SP autant au-delà du Pôle P, qu'il le rencontre en-deçà avant 6 heures.

mesure seroit la hauteur OP du Pôle P , qui est aussi donnée.

Ainsi, si l'on vouloir sçavoir quelle étoit la vraie hauteur FS du Soleil, sur l'horison, par exemple de Paris, le 24. du mois de Juin de l'année 1749. à 6 heures du soir : Il faudroit chercher (a) de la même manière dont nous l'avons déjà fait dans plusieurs des Usages précédents, quelle étoit la déclinaison DS de cet Astre à cet instant ; & comme on trouveroit que cette déclinaison étoit alors de 23 deg. 26 min. 12 sec. on connoitroit dans le triangle-Sphérique rectangle DSF , l'hypoténuse DS , puisque cette hypoténuse n'est autre chose que cette déclinaison même ; & l'angle FDS , de 48 deg. 50 min. 10 sec. puisque le Pôle est élevé de ce nombre de degrés sur l'horison de Paris. Ainsi, l'on chercheroit de la

(b) N. 263. manière suivante (b), la hauteur demandée FS .

Logarithme du sinus de l'angle FDS donné de
48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - - 9.8766969

Logarithme du sinus de l'hypoténuse DS trouvée
de 23 deg. 26 min. 12 sec. - - - - - 9.5995940

Logar. du sinus de la hauteur demandée FS - - - 29.4762909

(c) N. 103. qui (c) donneroit 17 deg. 25 min. 23 sec. pour cette hauteur.

Mais, on peut remarquer que l'on trouveroit (d) N. 266. aussi cette même hauteur, en cherchant (d) l'hypoténuse SZ du triangle-Sphérique SPZ qui seroit rectangle en P ; & dans lequel on connoitroit le côté SP , qui seroit le complément de la déclinaison DS ; avec le côté PZ qui est le complément de la hauteur OP du Pôle P .

384. 4^{ent} Enfin, si le Soleil étoit au Méridien, il auroit pour hauteur la différence de sa déclinaison à la hauteur de l'Equateur, lorsqu'il seroit dans les signes méridionaux ; & la somme de sa déclinaison & de la hauteur de l'Equateur, lorsqu'il seroit dans les signes septentrionaux. Ainsi, il n'y auroit alors rien de plus facile que de trouver sa hauteur sur l'horison.

SCHOLIE II.

385. Si au lieu de demander la hauteur du Soleil sur l'horison HO^* , on proposoit au con- * Fig. 164.
traire de trouver sa profondeur fs sous le même horison ; il faudroit chercher la valeur du côté Zfs du triangle-Sphérique obliquangle sPZ , de la même manière dont nous avons cherché celle du côté ZS du triangle SPZ de la Fig. 166. & l'excès de cette valeur sur 90 deg. seroit celle de la profondeur demandée.

On pourroit aussi trouver cette même profondeur, en renversant la Sphère ; & en cherchant ensuite la hauteur fs du Soleil sur l'horison HO , par rapport au Nadir N qui deviendroit alors le Zénith, & au Pôle p , de la même manière dont nous l'avons cherchée sur le même horison, par rapport au Zénith Z^* & au Pôle P ; puisque la hauteur * Fig. 166.
d'un Astre sur un horison par rapport à l'un des Pôles de cet horison, est la profondeur de ce même Astre sous ce même horison, par rapport à son autre Pôle ; & au contraire.

SCHOLIE III.

386. Enfin, c'est par ce que nous venons d'enseigner dans cet Usage, que l'on construit des Tables des différentes hauteurs du Soleil sur l'horison d'un certain lieu, à chaque heure du jour; & ces Tables sont très utiles dans la Gnomonique.

XIII. USAGE.

387. Connoissant la distance du Soleil au Méridien, sa déclinaison, & sa hauteur sur l'horison d'un certain lieu, trouver la hauteur du Pôle sur le même horison.

Le 14. du mois de Mai de l'année 1749. à 8 heures du matin, on a observé la vraie
 • Fig. 168. hauteur FS* du Soleil S sur l'horison HO, de 33 deg. 34 min. 7 sec. & il faut trouver la hauteur OP du Pôle P sur cet horison.

Solution. Après avoir trouvé de la même manière dont nous l'avons fait au N° 380, que le 14. du mois de Mai de l'année 1749. à 8 h. du matin, la déclinaison DS du Soleil étoit de 18 deg. 41 min. 4 sec. vers le septentrion; on connoît dans le triangle-Sphérique oblique SPZ, le côté PS de 71 deg. 18 min. 56 sec. puisque ce côté est le complément de cette déclinaison; le côté SZ de 56 deg. 25 min. 53 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur FS que l'on a observée de 33 deg. 34 min. 7 sec. & l'angle SPZ, ou DPE, de 60 deg.

60 deg. puisque la distance DE du Soleil au Méridien, qui (a) en est la mesure, est donnée (a) N. 196. de 4 heures qui répondent à 60 deg. de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) qu'un (b) N. 197. arc SM d'un grand cercle est tiré du sommet de l'angle S perpendiculairement au côté PZ (prolongé vers M, parce que les angles SPZ & SZP sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante, le côté PZ.

1^{ent} Dans le triangle-Sphérique SPM qui (c) est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse PS que l'on vient de trouver de 71 deg. 18 m. 56 sec. avec l'angle SPZ, ou SPM, que l'on vient aussi de trouver de 60 deg. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le segment (c) N. 184. PZM.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle SPM trouvé de 60 deg. - - - 0.3010300

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PS trouvée de 71 deg. 18 min. 56 sec. 9.5291463

Logar. de la tang. du compl. du segment PZM - - 9.8301763

qui (d) donne 34 deg. 4 min. 22 sec. pour la valeur de ce (d) N. 103. complément; & par conséquent, 55 deg. 55 min. 38 sec. pour celle de ce segment.

2^{ent} Dans le triangle-Sphérique obliquangle SPZ, on connoît le côté PS que l'on a trouvé de 71 deg. 18 min. 56 sec. le côté SZ que l'on a aussi trouvé de 56 deg. 25 min. 53 sec. & le segment PZM que l'on vient de trouver de 55 deg. 55 min. 38 sec. Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante (e), l'autre seg- (e) N. 303. ment ZM.

Complément du logarithme du sinus du complément du côté PS trouvé de 71 deg. 18 min. 56 sec. -	0.4943676
Logarithme du sinus du complément du côté SZ trou- vé de 56 deg. 25 min. 53 sec. - - - - -	9.7426744
Logarithme du sinus du complément du segment PZM trouvé de 55 deg. 55 min. 38 sec. - -	9.7483784
Logarithme du sinus du complément du segment ZM	<u>19.9854104</u>

- (a) N. 103. qui (a) donne 75 deg. 14 min. 12 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 14 deg. 45 min. 48 sec. pour celle de ce segment. Mais, cette dernière valeur étant retranchée de celle du segment PZM que l'on vient de trouver de 55 deg. 55 min. 38 sec. laisse 41 deg. 9 min 50 sec. pour celle du côté PZ. Ainsi, puisque ce côté est le complément de la hauteur demandée OP, cette hauteur est de 48 deg. 50 min. 10 sec.

S C H O L I E I.

388. 1^{ent} Si le Soleil étoit dans l'hémisphère méridional, cela ne changeroit rien à la manière dont nous venons de trouver la hauteur du Pôle.

- * Fig. 168. Mais le côté PS * du triangle SPZ, qui dans l'exemple que nous venons de proposer est la différence de la déclinaison DS au quart de cercle

- * Fig. 164. PD, seroit alors la somme PDS * de cette déclinaison & de ce même quart de cercle.

389. 1^{ent} Si le Soleil étoit dans l'Equateur, la résolution de ce Problème deviendroit très-facile ; puisqu'il ne s'agiroit alors que de trou-

- * Fig. 166. ver le côté ZE * du triangle-Sphérique sZE qui seroit rectangle en E ; & dans lequel on connoitroit l'hypoténuse Zs qui seroit le complément de la hauteur fs, laquelle est donnée ; avec le côté sE qui seroit la distance du Soleil au Méridien, laquelle est aussi donnée.

Ainsi, si ayant observé la vraie hauteur fs du Soleil dans l'Equateur, de 34 deg. 45 min. 9 sec. à 10 heures du matin, on veut sçavoir quelle est la hauteur OP du Pôle P sur l'horison HO du lieu auquel on a fait cette observation: on connoît dans le triangle-Sphérique sZE qui est rectangle en E , l'hypoténuse Zs de 55 d. 14 min. 51 sec. puisque cette hypoténuse est le complément de cette hauteur fs ; avec le côté sE de 30 deg. puisque la distance du Soleil au Méridien, dont ce côté est la mesure, est donnée de 2 heures qui répondent à 30 deg. de l'Equateur. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), (a) N. 172. le côté ZE .

Complément du logarithme du sinus du complément du côté sE trouvé de 30 deg.	- - -	0.0624694
Logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse Zs trouvée de 55 deg. 14 min. 51 sec.		9.7558997

Logarithme du sinus du complément du côté ZE	9.8183691
--	-----------

qui (b) donne 41 deg. 9 min. 50 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 48 deg. 50 min. 10 sec. pour celle de ce côté, lequel est égal à la hauteur demandée OP . (b) N. 103.

390. 3^{ent} Si le Soleil étoit à l'horison, la résolution du Problème seroit aussi facile que celle du précédent; puisqu'il ne s'agiroit que de trouver le côté OP * du triangle-Sphérique SPO * Fig. 161. qui seroit rectangle en O ; & dans lequel on connoitroit l'hypoténuse PS qui seroit le complément de la déclinaison DS , laquelle est donnée; avec l'angle SPO , ou DPO , qui seroit le supplément de l'angle DPE dont la mesure, qui (c) (c) N. 196. est la distance DE du Soleil au Méridien, est aussi donnée.

E e e ij

- Ainsi, si par exemple, pour construire une Table des Climats de demi-heure, on se proposoit*
- Fig. 161. *de trouver la hauteur OP* du Pôle P sur l'horizon HO d'un lieu où le plus long jour de l'année est de 16 heures, & auquel le Soleil se lève par conséquent à 4 heures du matin; on connoitroit dans le triangle-Sphérique SPO qui seroit rectangle en O, l'hypoténuse PS de 66 d. 31 m. 30 sec. puisque cette hypoténuse seroit le complément de la plus grande déclinaison DS du Soleil, laquelle est connue de 23 deg. 28 min. 30 sec. On connoitroit aussi dans le même triangle, l'angle SPO, ou DPO, de 60 deg. puisque cet angle a pour supplément l'angle DPE, dont*
- (a) N. 196. *(a) la mesure DE est la distance du Soleil au Méridien, laquelle seroit donnée de 8 heures, & par conséquent de 120 deg. Ainsi, l'on cher-*
- (b) N. 284. *cheroit de la manière suivante (b), le côté OP qui est la hauteur demandée.*

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle SPO trouvé de 60 deg.	- -	0.3010300
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PS trouvée de 66 deg. 31 min. 30 sec.	- - -	9.6377834

- | | | |
|---|---------|-----------|
| Logarithme de la tangente du complément de la hauteur demandée OP | - - - - | 9.9388134 |
|---|---------|-----------|
- (c) N. 103. *qui (-) donneroit 40 deg. 58 min. 38 sec. p. m. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 49 deg. 1 min. 22 sec. pour celle de cette hauteur.*

Mais on peut remarquer que si l'on réduisoit en degrés de l'Equateur les heures dont l'instant que l'on propose pour le lever du Soleil differe

de 6 heures du matin, on auroit la différence ascensionnelle FD *. Ainsi, dans l'exemple dont * Fig. 162. il s'agit, on connoîtroit dans le triangle-Sphérique FSD qui seroit rectangle en D, le côté FD de 30 deg. avec le côté DS de 23 deg. 28 min. 30 sec. & par conséquent, on chercheroit de la manière suivante (a), l'angle DFS que l'E- (a) N. 276. quateur EQ forme avec l'horison HO.

Complément du logarithme du sinus du côté FD
trouvé de 30 deg. - - - - - 0.3010300
Logarithme de la tangente du côté DS connu
de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - 9.6377834

Logarithme de la tangente de l'angle DFS - - 9.9388134
qui (b) donneroit 40 deg. 58 min. 38 sec. pour la valeur de cet (b) N. 103. angle, dont le complément 49 deg. 1 min. 22 sec. seroit la hauteur demandée OP †.

391. 4^{ent} Enfin, si au lieu de donner la hauteur du Soleil sur l'horison, on donnoit sa profondeur fs * sous le même horison, cela ne chan- * Fig. 164. geroit rien à la manière de trouver la hauteur OP du Pôle P; puisqu'il seroit pareillement question de chercher la valeur du côté PZ du triangle-Sphérique SPZ, dans lequel on connoîtroit le côté Ps, qui seroit le complément de la déclinaison du Soleil; le côté ZFs, qui seroit la somme du quart de cercle Zf & de la profondeur donnée fs ‡; avec l'angle sPZ, ou dPE, dont la mesure seroit la distance donnée dE du Soleil au Méridien.

† Cette proportion a précisément les mêmes termes que la précédente; parce que le triangle DFS est celui qui est formé par les prolongements des côtés du triangle SPO. Voyez le N° 266.

‡ Si l'on proposoit, par exemple, de trouver la hauteur du Pôle sur l'horison d'un lieu auquel le Soleil paroîtroit se lever à une certaine heure, le côté Zfs * seroit de 90 deg. 32 min. 20 sec. * Fig. 164.

SCHOLIE II.

392. Comme nous venons de parler de la manière de construire les Tables des Climats de demi-heure, nous allons donner ici celle de construire les Tables des Climats de mois; afin de ne point séparer ces deux Problèmes.

Pour cet effet, nous remarquerons que lorsque la hauteur du Pôle sur l'horison est de plus de 66 deg. 31 min. 30 sec. il y a une partie de l'Ecliptique, qui dans la révolution journalière de ce cercle ne passe point sous l'horison. Ainsi, pendant tout le temps que le Soleil est dans cette partie, qui est d'autant plus grande que le Pôle est élevé de plus de 66 deg. 31 min. 30 sec. il ne se couche point sous cet horison: Et comme il emploie environ un jour à parcourir un degré de l'Ecliptique, Et par conséquent 30 jours à en parcourir 30 deg. 60 jours à en parcourir 60, Et c. la durée du plus long jour est d'un mois aux lieux où la partie de l'Ecliptique qui ne passe point sous l'horison, est de 30 deg. de deux mois aux lieux où cette partie est de 60 deg. Et ainsi de suite. Cela supposé:

Si l'on dispose la Sphère de manière que l'horison HAO * Et le Méridien HZO coupent l'Ecliptique HVO, chacun en un même point O éloigné de 15 deg. du point du solstice d'Eté, l'arc de ce dernier cercle, qui se trouve compris entre ces deux points, est la moitié de la partie de ce même cercle qui ne passe jamais sous l'ho-

* Fig. 169.

rifon HAO d'un lieu où la durée du plus long jour est d'un mois : & la partie OQ de ce Méridien, qui se trouve comprise entre ce même point O & l'Equateur EQ, est le complément de la hauteur OP du Pôle P sur ce même horifon. Or, dans le triangle-Sphérique γ OQ qui est rectangle en Q ; on connoît l'angle $O\gamma Q$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est l'obliquité de l'Ecliptique $H\gamma O$; avec l'hypoténuse γO de 75 deg. puisque cette hypoténuse est une partie de l'Ecliptique, qui est comprise entre le point γ auquel ce cercle coupe l'Equateur, & un point O éloigné [C] de 15 deg. du point du solstice. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), (a) N. 163. le côté OQ de ce triangle ; c'est-à-dire, le complément de la hauteur demandée OP.

Logarithme du sinus de l'angle $O\gamma Q$ connu de	
23 deg. 28 min. 30 sec.	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse γO trouvée	
de 75 deg.	9.9849438

Logarithme du sinus du côté OQ	9.5852073
--------------------------------	-----------

qui (b) donne 22 deg. 37 min. 47 sec. pour la valeur de ce côté ; (b) N. 103. & par conséquent, 67 deg. 22 min. 13 sec. pour celle de la hauteur demandée OP.

Si l'on dispose ensuite la Sphère de manière que le point O * auquel le Méridien, l'horifon, * Fig, 169. & l'Ecliptique s'entrecoupent, soit éloigné de 30 deg. du point du solstice d'Été, l'arc de l'Ecliptique qui se trouve compris entre ces deux points, est de même que dans la disposition précédente, la moitié de la partie de ce dernier cercle qui ne passe jamais sous l'horifon HAO d'un lieu où

la durée du plus long jour est de deux mois : & la partie OQ du Méridien HZO est aussi de même, le complément de la hauteur OP du Pôle P sur cette horison. Or, dans le triangle-Sphérique rectangle γOQ , on connoit l'angle $O\gamma Q$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse γO de 60 deg. Ainsi, l'on cherche ce complément OQ, & par conséquent cette hauteur OP, de la même manière dont nous les avons trouvés dans la disposition précédente.

Enfin, en disposant toujours ainsi la Sphère, • Fig. 169. de manière que le point O* soit éloigné du point du solstice d'Été, de la moitié de la partie de l'Ecliptique qui ne passe point sous l'horison du lieu où la durée du plus long jour est du nombre de mois, de semaines, ou même de jours que l'on veut, on trouve toujours de la même manière dont nous venons de le faire, la hauteur du Pôle sur l'horison de ce lieu. Ainsi, l'on peut connoître quand on le veut, quelle doit être la hauteur du Pôle sur l'horison de chaque lieu où la différence de la durée du plus long jour à celle du plus long jour d'un autre lieu est d'un mois, ou d'une semaine, ou même d'un jour ; & par conséquent, construire des Tables des Climats de mois, des Climats de semaines, & même des Climats de jours, suivant qu'on le juge à propos.

393. Mais, si au lieu de demander quelle doit être la hauteur du Pôle sur l'horison d'un lieu où la durée du plus long jour est de plusieurs jours, on propose au contraire de trouver la durée du

de plus long jour à un lieu où le Pôle est élevé de plus de 66 d. 31 m. 30 s. alors il faut chercher combien la partie de l'Ecliptique qui ne passe jamais sous l'horison de ce lieu, contient de degrés; & compter ensuite ces degrés pour autant de jours pendant lesquels le Soleil ne se couche point sous cet horison. Or, suivant ce que nous venons de dire, l'hypoténuse γO^* du triangle-Sphérique γOQ qui est rectangle en Q , est toujours le complément de la moitié de cette partie. Donc, puisque le côté OQ de ce même triangle est aussi toujours le complément de la hauteur OP du Pôle P , qui est donnée dans le cas dont il s'agit, & que l'angle $O\gamma Q$ est constamment de 23 deg. 28 min. 30 sec. si l'on renverse la proportion par laquelle nous venons de connoître le côté OQ , on trouve le complément γO de la moitié de la partie de l'Ecliptique que l'on demande; & par conséquent, on connoît cette partie entière, qui donne le nombre des jours pendant lesquels le Soleil ne se couche point sous l'horison du lieu proposé.

Ainsi, si l'on demande, par exemple, de combien est la durée du plus long jour, à un certain lieu où le Pôle P est élevé de 70 deg. 23 min. on connoît dans le triangle-Sphérique rectangle γOQ , le côté OQ de 19 deg. 37 min. puisque ce côté est le complément de cette hauteur donnée; avec l'angle $O\gamma Q$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est toujours l'obliquité de l'Ecliptique, laquelle est connue de cette grandeur. Ainsi, l'on cherche de la manière sui-

(*) N. 164. Vante (a), l'hypoténuse YO de ce triangle.

Complément du logar. du sinus de l'angle OYQ	
connu de 23 d. 28 m. 30 s. - - - -	0.3997369
Logar. du sinus du côté OQ trouvé de 19 deg.	
37 min. - - - - -	9.5259844

Logarithme du sinus de l'hypoténuse YO - - 9.9257209

(b) N. 103. qui (b) donne 57 deg. 26 min. 10 sec. pour la valeur de cette hypoténuse ; & par conséquent , 32 deg. 33 min. 50 sec. pour celle de la moitié de la partie de l'Ecliptique qui ne passe jamais sous l'horison du lieu proposé. Or , puisque la moitié de cette partie est de 32 deg. 33 min. 50 sec. cette partie entière est de 65 deg. 7 min. 40 sec. qui donnent 2 mois 5 jours 3 heures 34 min. pour la durée du plus long jour , à tous les lieux où le Pôle est élevé de 70 deg. 23 min.

XIV. USAGE.

394. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec la distance du Soleil au Méridien de ce lieu, trouver 1^{ent}, l'arc de l'horison qui est compris entre le cercle horaire & ce Méridien : 2^{ent}, l'angle que l'horison forme avec ce cercle horaire : 3^{ent} enfin, l'arc de ce même cercle horaire, qui est compris entre le Pôle & l'horison.

Fig. 170. On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'angle horaire IPE, ou la distance DE du Soleil au Méridien, de 105 deg. & il faut trouver 1^{ent}, l'arc IO de l'horison, qui est compris entre le cercle horaire PIp & le Méridien HZO : 2^{ent}, l'angle PIO que l'horison forme avec ce cercle horaire : 3^{ent} enfin, l'arc PI de ce même cercle horaire, qui est compris entre le Pôle P & le même horison HO.

DE TRIGONOMETRIE. 411

Solution. Dans le triangle-Sphérique IPO qui est rectangle en O, on connoît le côté OP de 48 deg. 50 min. 10 sec. puisque ce côté est donné de cette grandeur; avec l'angle IPO de 75 deg. puisque cet angle est le supplément de l'angle IPE qui est donné de 105 deg. Ainsi, l'on cherche ^{1^{ent}} de la manière suivante (a), le côté IO. 15

Logarithme du sinus du côté OP donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - - 9.8766969

Logarithme de la tangente de l'angle IPO trouvé de 75 deg. - - - - - 10.1719475

Logar. de la tangente du côté demandé IO - - - 20.4486444

qui (b) donne 70 deg. 24 min. 30 sec. pour la valeur de ce côté. (a) N. 278

^{2^{ent}} de la manière suivante (c), l'angle PIO. (b) N. 103

Logar. du sinus de l'angle IPO trouvé de 75 deg. 9.9849438

Logarithme du sinus d' complément du côté OP donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - 9.8183678

Logarithme du sinus du complément de l'angle demandé PIO - - - - - 19.8033116

qui (d) donne 39 deg. 28 min. 42 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 50 deg. 31 min. 18 sec. p. m. pour celle de cet angle. (c) N. 274

Ou de la manière suivante (e)

(d) N. 103

Complément du logarithme du sinus du côté IO trouvé de 70 deg. 24 min. 30 sec. - - - - 0.0259001

Logarithme du sinus du côté OP donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - - - - 9.8766969

Logar. du sinus de l'angle IPO trouvé de 75 deg. 9.9849438

Logar. du sinus de l'angle demandé PIO - - - 19.8875408

qui (f) donne de même 50 deg. 31 min. 18 sec. p. m. pour la valeur de cet angle. (e) N. 289

F f f ij

411. TRAITE COMPLET

(4) N. 285. 3^{ent} enfin, de la manière suivante (a), l'arc PI.

Logarithme du sinus du complément de l'angle IPO	
trouvé de 75 deg. - - - - -	9.4129962
Logarithme de la tangente du complément du côté	
OP donné de 48 deg. 50 min. 10 sec. - - -	9.9416710
Logarithme de la tang. du complément de l'hypoté-	
nuse PI - - - - -	9.3546672

(5) N. 103. qui (b) donne 13 deg. 4 min. 43 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 76 d. 55 m. 17 s. pour celle de cette hypoténuse , c'est-à-dire, pour celle de l'arc demandé.

SCHOLIE.

395. La première partie de cet Usage est très-utile dans la Gnomonique , pour tracer les Cadrans horisontaux ; parce qu'en cherchant de la manière dont nous venons de le faire , les arcs de l'horison qui sont compris entre le Méridien & les cercles horaires , on a les angles que les lignes horaires forment avec la Méridienne , sur le plan du Cadran. Et comme un Cadran horisontal est un Cadran vertical pour un lieu dont il est éloigné de 90 deg. on peut se servir du même Usage pour tracer les Cadrans verticaux , en changeant dans le calcul, la hauteur du Pôle en son complément.

XV. USAGE.

396. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu , le lieu du Soleil , avec l'obliquité de l'Ecliptique , trouver 1^{ent}, le point de ce dernier cercle qui se leve à un temps donné :

2^{ent} , l'angle que ce même dernier cercle forme à cet instant avec cet horison.

ON donne la hauteur OP^* du Pôle P sur * Fig. 171. l'horison HO , de 48 deg. 50 min. 10 sec. le lieu du Soleil à 10 heures du matin, au 10^{me} deg. du Ω : avec l'obliquité $D\triangle S$, ou $I\triangle F$, de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. & il faut trouver 1^{ent} , le point I de ce dernier cercle qui se leve à cet instant : 2^{ent} , l'angle $\triangle IH$ que ce même dernier cercle forme à ce même instant, avec cet horison.

Solution. Cherchez de la manière suivante (a), l'ascension droite γED du 10^{me} deg. du (a) N. 342. Ω ; ou seulement l'arc $D\triangle$.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $D\triangle S$ donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. 0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse $\triangle S$ trouvée de 50 deg. - - - - 9.9238135

Logar. de la tang. du complément du côté $D\triangle$ - 9.9613334
qui (b) donne 42 deg. 27 min. 10 sec. p. m. pour la valeur de (b) N. 103. ce complément ; & par conséquent, 47 deg. 32 min. 50 sec. pour celle de ce côté.

Par ce moyen, on connoît dans le triangle Sphérique obliquangle $I\triangle F$, le côté $\triangle F$ de 12 d. 27 min. 10 sec. puisque ce côté est le complément de la somme $ED\triangle$ de cet arc $D\triangle$ que l'on vient de trouver, & de la distance $\dot{E}D$ du Soleil au Méridien, laquelle est donnée de 2 heures, & par conséquent de 30 deg. Or, on connoît aussi dans le même triangle, l'angle $I\triangle F$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec

l'angle $\triangle FI$, ou $\triangle EFH$, de 41 deg. 9 min. 50 sec.

(a) N. 196. puisque (a) ce dernier angle a pour mesure la hauteur HE de l'Equateur ; & par conséquent, le complément de la hauteur OP du Pôle P , laquelle est aussi donnée de 48 deg. 50 min.

(b) N. 197. 10 sec. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc $\triangle M$ d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle \triangle perpendiculairement au côté FI , (prolongé vers M , parce que les angles $\triangle IF$, & $\triangle FI$, sont de différente espece ,) on cherche de la manière suivante, le côté demandé $\triangle I$, & l'angle demandé $\triangle IH$.

1^{er} Dans le triangle-Sphérique $M\triangle F$ qui [c] est rectangle en M , on connoît l'hypoténuse $\triangle F$ que l'on vient de trouver de 12 deg. 27 min. 10 sec. avec l'angle $\triangle FM$, ou $\triangle FI$, que l'on vient aussi de trouver de 41 deg. 9 min. 50 sec.

(c) N. 283. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'angle $F\triangle M$.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse $\triangle F$ trouvée de 12 deg. 27 min.

10 sec.

0.0103393

Logarithme de la tangente du complément de l'angle

$\triangle FM$ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.

10.0583290

Logar. de la tang. de l'angle $F\triangle M$

10.0686683

(d) N. 103. qui (d) donne 49 deg. 30 min. 39 sec. p. m. pour la valeur de cet angle ; duquel ayant retranché l'angle $I\triangle F$, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 26 deg. 2 min. 9 sec. pour la valeur de l'angle $I\triangle M$.

2^{er} Dans le triangle-Sphérique obliquangle $I\triangle F$, on connoît l'angle au sommet $F\triangle M$ que l'on vient de trouver de 49 deg. 30 min. 39 sec.

DE TRIGONOMETRIE. 415

l'autre angle au sommet $I\Delta M$ que l'on vient aussi de trouver de 26 deg. 2 min. 9 sec. & le côté ΔF que l'on a trouvé de 12 deg. 27 m. 10 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'autre côté ΔI .

(a) N. 305.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle $F\Delta M$ trouvé de 49 deg. 30 min. 39 s.	0.1875518
Logarithme du sinus du complément de l'angle $I\Delta M$ trouvé de 26 deg. 2 min. 9 sec. - -	9 9535276
Logarithme de la tangente du complément du côté ΔF trouvé de 12 deg. 27 min. 10 sec. - -	10.6559417
Logar. de la tangente du complément du côté ΔI	20.7970211

qui (b) donne 80 deg. 55 min. 59 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 9 deg. 4 min. 1 sec. pour celle de ce côté. Or, puisque l'arc ΔI est de 9 deg. 4 min. 1 sec. le point I de l'Ecliptique qui se lève sur l'horison à l'instant demandé, est le 9^{me} deg. 4 min. 1 sec. de Δ .

(b) N. 103.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique $M\Delta I$ qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse ΔI que l'on vient de trouver de 9 deg. 4 min. 1 sec. avec l'angle $I\Delta M$ que l'on a trouvé de 26 deg. 2 min. 9 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'autre angle ΔIM .

(c) N. 123.

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse ΔI trouvée de 9 deg. 4 min. 1 sec.	0.0054608
Logar. de la tangente du complément de l'angle $I\Delta M$ trouvé de 26 deg. 2 min. 9 sec. - - - -	10.3111292

Logarithme de la tangente de l'angle ΔIM - - - 10.3165900

qui (d) donne 64 deg. 14 min. 50 p. m. pour la valeur de (d) N. 103. cet angle, lequel est le même que l'angle demandé ΔIH .

(d) N. 103.

SCHOLIE I.

397. Dans l'exemple que nous venons de donner, l'intersection \triangle^* de l'Ecliptique & de l'Equateur se trouve sur l'horison. Mais, si l'on en proposoit un dans lequel cette même intersection se trouveroit sous ce cercle \dagger ; alors pour
 • Fig. 171. connoître le côté $\triangle F^*$ du triangle-Sphérique oblique l' $\triangle F$, il faudroit retrancher du supplément $D\triangle$ de l'ascension droite $\vee ED$ du Soleil, le complément DF de la distance ED de cet Astre au Méridien; & l'on trouveroit ensuite le côté $\triangle I$ de ce triangle, avec l'angle $\triangle IM$, ou SIH , de la même manière dont nous venons de le faire dans cet Usage.

SCHOLIE II.

• Fig. 171. 398. Si en commençant au point I^* de l'E-
 • 172. cliptique, qui est à l'horison, & en montant vers le Zénith, on compte sur ce cercle 90 deg. & si l'on fait ensuite passer un cercle vertical par ce 90^{me} deg. l'arc de ce vertical, qui se trouve compris entre ce même 90^{me} deg. & l'horison, est (a) la mesure de l'angle SIH que l'Ecliptique forme avec ce dernier cercle. Par consé-

(a) N. 242.
ou 196.

\dagger On connoît le point de l'Equateur qui est au Méridien; & par conséquent, dans lequel de l'hémisphère supérieur ou de l'hémisphère inférieur, chaque intersection de l'Equateur & de l'Ecliptique est située, en ajoutant l'angle horaire à l'Ascension droite du Soleil, ou en l'en retranchant, suivant les différents cas qu'il est facile de voir sur la Sphère.

quent,

DE TRIGONOMETRIE. 417

quens, on trouve la hauteur du 90^{me} deg. de l'Ecliptique, en cherchant comme nous venons de le faire dans cet Usage, l'angle SIH que ce cercle forme avec l'horison.

XVI. USAGE.

399. Trouver l'ascension droite d'une Etoile quelconque.

Solution. Observez (a) la hauteur méridienne du Soleil; d'où vous déduirez (b) sa déclinaison, son lieu dans l'Ecliptique †, & son ascension droite. La nuit suivante, observez par le moyen d'une Pendule à secondes que vous aurez réglée sur le vrai mouvement du Soleil, l'instant auquel l'Etoile proposée passera par le Méridien. Réduisez en degrés de l'Equateur le temps qui se sera écoulé depuis le midi précédent, jusqu'à cet instant. Enfin, ajoutez ces degrés à l'ascension droite du Soleil que vous aurez trouvée pour ce midi précédent; & la somme, ou ce qui restera de cette somme après en avoir retranché 360 deg. lorsqu'elle surpassera ce nombre, sera l'ascension droite demandée.

SCHOLIE I.

400. Lorsque l'on connoitra l'ascension droite d'une Etoile, on trouvera celle de telle autre Etoile

† On peut ne se point donner la peine d'observer la hauteur méridienne du Soleil; & chercher son lieu dans l'Ecliptique par le moyen des Tables de M. De Cassini.

G g g

218 TRAITE' COMPLET

que l'on voudra , en observant la différence des passages de ces deux Etoiles par le Méridien ; & en ajoutant ensuite cette différence réduite en degrés , à l'ascension droite de la première , ou en l'en retranchant , suivant la position de l'Etoile proposée , à l'occident ou à l'orient de cette même première Etoile.

SCHOLIE II.

401. *Il faut observer avec beaucoup de précision le temps qui s'écoule entre les passages du Soleil & des Etoiles par le Méridien ; parce qu'une erreur de 4 secondes d'heure dans ce temps , en causeroit une d'une minute de degré dans les ascensions droites de ces Etoiles.*

SCHOLIE III.

402. *Lorsque l'on connoît l'ascension droite du Soleil , avec celle d'une Etoile quelconque , on trouve facilement l'instant de la Culmination de cette Etoile ; c'est-à-dire , l'instant auquel elle passe par le Méridien ; puisque la différence qui se trouve entre ces ascensions étant réduite en temps , donne la différence de l'instant du passage du Soleil par le Méridien à l'instant du passage de l'Etoile proposée par le même Méridien.*

Ainsi , si l'on veut connoître , par exemple , l'heure à laquelle Regulus a passé par le Méridien de Paris , le 10. du mois de Mai de l'année 1749. on retranche de l'ascension droite de cette Etoile , qui ce jour-là , étoit de 148 deg.

44 min. 30 sec. l'ascension droite du Soleil, qui ce même jour étoit de 57 deg. 15 m. 12 s. & après avoir réduit en temps la différence 91 d. 29 min. 18 sec. de ces deux ascensions, on a 6 heures 5 min. 56 sec. du soir, pour l'instant de la Culminaison de Regulus, au jour proposé.

Mais, si l'on demandoit l'heure à laquelle l'Etoile polaire a passé ce même jour par le même Méridien, alors comme l'ascension droite de cette Etoile, qui le jour proposé étoit de 10 deg. 37 m. 17 s. seroit plus petite que celle du Soleil, qui le même jour étoit de 57 d. 15 m. 12 s. on retrancheroit la première de la dernière; & après avoir réduit en temps la différence 46 deg. 37 min. 55 sec. de ces deux ascensions, on auroit 3 heures 6 min. 31 sec. avant midi, & par conséquent, 8 heures 53 min. 29 sec. du matin, pour l'instant de la Culminaison de cette autre Etoile, le 20. du mois de Mai. de l'année 1742.

XVII. USAGE.

403. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite, & la déclinaison d'une Etoile, trouver la latitude †, & la longitude ¶ de cette Etoile.

† On appelle *Latitude* d'un Astre, la distance du centre de cet Astre à l'Ecliptique. On la divise en septentrionale & en méridionale; & elle se mesure sur la circonférence du cercle de latitude de cet Astre; c'est-à-dire, sur la circonférence d'un grand cercle qui est perpendiculaire à l'Ecliptique, & passe par le centre de ce même Astre.

¶ On appelle *Longitude* d'un Astre, l'arc de l'Ecliptique qui est compris entre le premier point du ♈ & le cercle de latitude de cet Astre. On la compte en suivant l'ordre des Signes.

que l'on voudra, en observant la différence des passages de ces deux Etoiles par le Méridien; & en ajoutant ensuite cette différence réduite en degrés, à l'ascension droite de la première, ou en l'en retranchant, suivant la position de l'Etoile proposée, à l'occident ou à l'orient de cette même première Etoile.

SCHOLIE II.

401. Il faut observer avec beaucoup de précision le temps qui s'écoule entre les passages du Soleil & des Etoiles par le Méridien; parce qu'une erreur de 4 secondes d'heure dans ce temps, en causeroit une d'une minute de degré dans les ascensions droites de ces Etoiles.

SCHOLIE III.

402. Lorsque l'on connoît l'ascension droite du Soleil, avec celle d'une Etoile quelconque, on trouve facilement l'instant de la Culmination de cette Etoile; c'est-à-dire, l'instant auquel elle passe par le Méridien; puisque la différence qui se trouve entre ces ascensions étant réduite en temps, donne la différence de l'instant du passage du Soleil par le Méridien à l'instant du passage de l'Etoile proposée par le même Méridien.

Ainsi, si l'on veut connoître, par exemple, l'heure à laquelle Regulus a passé par le Méridien de Paris, le 10. du mois de Mai de l'année 1749. on retranche de l'ascension droite de cette Etoile, qui ce jour-là, étoit de 148 deg.

44 min. 30 sec. l'ascension droite du Soleil, qui ce même jour étoit de 57 deg. 13 m. 12 s. & après avoir réduit en temps la différence 91 d. 29 min. 18 sec. de ces deux ascensions, on a 6 heures 5 min. 56 sec. du soir, pour l'instant de la Culminaison de Regulus, au jour proposé.

Mais, si l'on demandoit l'heure à laquelle l'Etoile polaire a passé ce même jour par le même Méridien, alors comme l'ascension droite de cette Etoile, qui le jour proposé étoit de 10 deg. 37 m. 17 s. seroit plus petite que celle du Soleil, qui le même jour étoit de 57 d. 13 m. 12 s. on retrancheroit la première de la dernière; & après avoir réduit en temps la différence 46 deg. 37 min. 55 sec. de ces deux ascensions, on auroit 3 heures 6 min. 31 sec. avant midi, & par conséquent, 8 heures 53 min. 29 sec. du matin, pour l'instant de la Culminaison de cette autre Etoile, le 20. du mois de Mai de l'année 1749.

XVII. USAGE.

403. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique; avec l'ascension droite, & la déclinaison d'une Etoile, trouver la latitude †, & la longitude § de cette Etoile.

† On appelle *Latitude* d'un Astre, la distance du centre de cet Astre à l'Ecliptique. On la divise en septentrionale & en méridionale; & elle se mesure sur la circonférence du *cercle de latitude* de cet Astre; c'est-à-dire, sur la circonférence d'un grand cercle qui est perpendiculaire à l'Ecliptique, & passe par le centre de ce même Astre.

§ On appelle *Longitude* d'un Astre, l'arc de l'Ecliptique qui est compris entre le premier point du ♈ & le cercle de latitude de cet Astre. On la compte en suivant l'ordre des Signes.

410 TRAITE' COMPLET

L'Etoile dont on veut connoître la latitude & la longitude , peut être située dans l'Equateur , ou hors de l'Equateur ; ainsi cet Usage a deux cas.

PREMIER CAS.

Lorsqu'il s'agit d'une Etoile située dans l'Equateur.

Fig. 173. 404. On donne l'obliquité $S\gamma D$ de l'Ecliptique , de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite γS d'une Etoile S située dans l'Equateur EQ , de 53 deg. 17 min. & il faut trouver la latitude SD de cette Etoile, & sa longitude γD .

Solution. Si l'on suppose un cercle de latitude IDS tiré du Pôle I de l'Ecliptique par le centre S de l'Etoile proposée , on a un triangle-Sphérique γDS qui est rectangle en D ; & dans lequel on connoît l'angle $S\gamma D$, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'hypoténuse γS , qui est aussi donnée de 53 deg. 17 min. Ainsi,

(a) N. 163. l'on cherche 1^{ent} , de la manière suivante (a), la latitude SD .

Logar. du sinus de l'angle $S\gamma D$ donné de 23 deg.	
28 min. 30 sec.	9.6002635
Logar. du sinus de l'hypoténuse γS donnée de 53 d.	
17 min.	9.9039587
Logar. du sinus de la latitude demandée SD	89.5042222

(b) N. 103. qui (b) donne 18 deg. 37 min. 18 sec. p. m. pour la valeur de cette latitude.

DE TRIGONOMETRIE. 421

2^{ent}, de la manière suivante (a), la longi- (a) N. 184.
tude γD .

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle γD donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypo- ténuse γS donnée de 53 deg. 17 min. - - -	9.8726396

Logar. de la tangente du complément de la longitude
demandée γD - - - - - 9.9101595
qui (b) donne 39 deg. 6 min. 56 sec. pour la valeur de ce (b) N. 103.
complément ; & par conséquent, 50 deg. 53 min. 4 sec. pour
celle de cette longitude.

AUTRE EXEMPLE.

405. On donne l'obliquité $B\hat{C}$ * de l'Eclip- * Fig. 173.
tique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascen-
sion droite γQB d'une Etoile B située dans l'E-
quateur EQ, de 128 deg. 49 min. & il faut
trouver la latitude BC de cette Etoile, & sa
longitude γSC .

Solution. Dans le triangle-Sphérique $\triangle CB$
qui est rectangle en C, on connoît l'angle $B\hat{C}$
de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle
est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse
 $B\hat{C}$ de 51 deg. 11 min. puisque cette hypoté-
nuse est le supplément de l'ascension droite
 γQB , qui est donnée de 128 deg. 49 min.
Ainsi, l'on cherche 1^{ent} de la manière suivan-
te (c), la latitude BC. (c) N. 163.

Logarithme du sinus de l'angle $B\hat{C}$ donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse $B\hat{C}$ trouvée de 51 deg. 11 min. - - - -	9.8916242

Logar. du sinus de la latitude demandée BC - - - 19.4918877
qui (d) donne 18 deg. 4 min. 54 sec. p. m. pour la valeur de (d) N. 103.
cette latitude.

(a) N. 284. 2^{ent} , de la manière suivante (a), la longitude $\gamma\psi C$.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $B\triangle C$ donné de 23 deg. 28 min. 30 s. 0.0375199
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse
 $B\triangle$ trouvée de 51 deg. 11 min. - - - - 9.9055259

Logar. de la tangente du complément du côté $C\triangle$ - 9.9430458

(b) N. 103. qui (b) donne 41 deg. 15 min. 14 sec. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 48 deg. 44 min. 46 sec. pour celle de ce côté ; laque le étant retranchée de la demi-circonférence $\gamma\psi\triangle$, laissera 131 deg. 15 min. 14 sec. pour la longitude demandée $\gamma\psi C$.

AUTRE EXEMPLE.

• Fig. 173. 406. On donne l'obliquité $F\triangle G$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite $\gamma Q\triangle F$ d'une Etoile F située dans l'Equateur EQ, de 213 deg. 27 min. & il faut trouver la latitude FG de cette Etoile, & sa longitude $\gamma\psi\triangle G$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $\triangle FG$ qui est rectangle en G, on connoît l'angle $F\triangle G$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse $\triangle F$ de 33 deg. 27 min. puisque cette hypoténuse est l'excès de l'ascension droite $\gamma Q\triangle F$, qui est donnée de 213 deg. 27 min. sur la demi-circonférence $\gamma Q\triangle$ de l'Equateur EQ. Ainsi, l'on cherche 1^{ent} , de la manière sui-

(c) N. 263. vante (c), la latitude FG.

DE TRIGONOMETRIE. 423

Logarithme du sinus de l'angle $F\hat{A}G$ donné de
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - 9.6002635

Logarithme du sinus de l'hypoténuse AF trouvée
de 33 deg. 27 min. - - - - - 9.7413164

Logar. du sinus de la latitude demandée FG - 19.341,799 (a) N. 103,
qui (a) donne 12 deg. 41 min. 2 sec. p. p. pour la valeur de
cette latitude.

2^{ent}, de la manière suivante (b), la longi- (b) N. 184.
tude $\gamma\hat{G}G$.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $F\hat{A}G$ donné de 23 deg. 28 min. 30 f. 0.0375197

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AF trouvée de 33 deg. 27 min. - - 10.1800408

Logarithme de la tang. du complément du côté AG 10.2175609

qui (c) donne 58 deg. 47 min. 10 sec. p. m. pour la valeur de (c) N. 103.
ce complément; & par conséquent, 31 deg. 12 min. 50 sec.
pour celle de ce côté; laquelle étant ajoutée a la demi-circon-
férence $\gamma\hat{G}G$, donnera 211 deg. 12 min. 50 sec. pour la
longitude demandée $\gamma\hat{G}G$.

AUTRE EXEMPLE.

407. Enfin, on donne l'obliquité HVK * de * Fig. 173.
l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec
l'ascension droite $\gamma Q\hat{A}EH$ d'une Etoile H située
dans l'Equateur EQ de 291 deg. 48 min. &
il faut trouver la latitude HK de cette Etoile,
& sa longitude $\gamma\hat{G}G K$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique γHK
qui est rectangle en K , on connoît l'angle HVK
de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle
est donné de cette grandeur; avec l'hypoténuse
 $H\gamma$ de 68 deg. 12 min. puisque cette hypo-
ténuse est la différence de l'ascension droite

422 TRAITE' COMPLET .

(a) N. 184. ^{2^{ent}}, de la manière suivante (a), la longitude $\gamma\phi C$.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $B\triangle C$ donné de 23 deg. 28 min. 30 s. 0.0375199
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse
 $B\triangle$ trouvée de 51 deg. 11 min. - - - 9.9055259

Logar. de la tangente du complément du côté $C\triangle$ - 9.9430458

(b) N. 103. qui (b) donne 41 deg. 15 min. 14 sec. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 48 deg. 44 min. 46 sec. pour celle de ce côté ; laque le étant retranchée de la demi-circonférence $\gamma\phi\triangle$, laissera 131 deg. 15 min. 14 sec. pour la longitude demandée $\gamma\phi C$.

AUTRE EXEMPLE.

Fig. 173. 406. On donne l'obliquité $F\triangle G$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite $\gamma Q\triangle F$ d'une Etoile F située dans l'Equateur EQ, de 213 deg. 27 min. & il faut trouver la latitude FG de cette Etoile , & sa longitude $\gamma\phi\triangle G$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $\triangle FG$ qui est rectangle en G, on connoît l'angle $F\triangle G$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse $\triangle F$ de 33 deg. 27 min. puisque cette hypoténuse est l'excès de l'ascension droite $\gamma Q\triangle F$, qui est donnée de 213 deg. 27 min. sur la demi-circonférence $\gamma Q\triangle$ de l'Equateur EQ. Ainsi, l'on cherche ^{1^{ent}}, de la manière sui-

(c) N. 263. vante (c), la latitude FG.

DE TRIGONOMETRIE. 413

Logarithme du sinus de l'angle $F\hat{A}G$ donné de
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - - 9.6002635

Logarithme du sinus de l'hypoténuse AF trouvée
de 33 deg. 27 min. - - - - - 9.7413164

Logar. du sinus de la latitude demandée FG - 29.341,799 (a) N. 103.
qui (a) donne 12 deg. 41 min. 2 sec. p. p. pour la valeur de
cette latitude.

2^{ent}, de la manière suivante (b), la longi- (b) N. 284.
tude $\gamma\phi\hat{A}G$.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $F\hat{A}G$ donné de 23 deg. 28 min. 30 s. 0.0375197

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AF trouvée de 33 deg. 27 min. - - 10.1800408

Logarithme de la tang. du complément du côté AG 10.2175609

qui (c) donne 58 deg. 47 min. 10 sec. p. m. pour la valeur de (c) N. 103.
ce complément ; & par conséquent, 31 deg. 12 min. 50 sec.
pour celle de ce côté ; laquelle étant ajoutée à la demi-circon-
férence $\gamma\phi\hat{A}$, donnera 211 deg. 12 min. 50 sec. pour la
longitude demandée $\gamma\phi\hat{A}G$.

AUTRE EXEMPLE.

407. Enfin, on donne l'obliquité HVK^* de * Fig. 173.
l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec
l'ascension droite $\gamma Q\hat{A}EH$ d'une Etoile H située
dans l'Equateur EQ de 291 deg. 48 min. &
il faut trouver la latitude HK de cette Etoile,
& sa longitude $\gamma\phi\hat{A}K$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique γHK
qui est rectangle en K , on connoît l'angle HVK
de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle
est donné de cette grandeur ; avec l'hypoténuse
 $H\gamma$ de 68 deg. 12 min. puisque cette hypo-
ténuse est la différence de l'ascension droite

424 TRAITE' COMPLET

$\gamma Q \triangle EH$, qui est donnée de 291 deg. 48 min. à la circonférence entière de l'Equateur EQ. Ainsi, l'on cherche 1^{ent}, de la manière sui-

(a) N. 263. vante (a), la latitude HK.

Logarithme du sinus de l'angle $H\gamma K$ donné de	
23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - -	9.6002635
Logarithme du sinus de l'hypoténuse $H\gamma$ trouvée	
de 68 deg. 12 min. - - - - -	9.9677753
Logarithme du sinus de la latitude demandée HK -	29.5 680388

(b) N. 103. qui (b) donne 21 deg. 41 min. 25 sec. p. p. pour la valeur de cette latitude.

(c) N. 284. 2^{ent}, de la manière suivante (c), la longitude $\gamma \phi \triangle \gamma K$.

Complément du logarithme du sinus du complément	
de l'angle $H\gamma K$ donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. -	0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypo-	
ténuse $H\gamma$ trouvée de 68 deg. 12 min. - -	9.6010290

Logar. de la tangente du complément du côté $K\gamma$ 9.6395489

(d) N. 103. qui (d) donne 23 deg. 33 min. 37 sec. p. m. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 66 deg. 26 min. 23 sec. pour celle de ce côté; laquelle étant retranchée de la circonférence entière de l'Ecliptique $\phi \gamma$, laissera 293 deg. 33 min. 37 sec. pour la longitude demandée $\gamma \phi \triangle \gamma K$.

SECOND CAS.

Lorsqu'il s'agit d'une Etoile située hors de l'Equateur.

* Fig. 174. 408. On donne l'obliquité $Q\gamma \phi$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite γD de la Ceinture d'Andromède marquée c dans Bayer, de 10 deg. 55 min 55 sec. avec

Donnée sa déclinaison $D\epsilon$, de 34 deg. 17 min. 3 sec. vers le septentrion †. & il faut trouver la latitude $B\epsilon$ de cette Etoile, & sa longitude γB .

Solution. Le cercle de latitude $B\epsilon I$ de l'Etoile proposée, son cercle de déclinaison $D\epsilon P$, avec autre cercle $\gamma P\epsilon$ que l'on suppose être tiré du Pôle P de l'Equateur, par le Pôle I de l'Ecliptique, & par conséquent, par les points γ & ϵ des solstices, forment en s'entre-coupant un triangle - Sphérique obliquangle ϵIP , dans lequel on connoît le côté IP de 23 d. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur : le côté ϵP de 55 deg. 42 min. 57 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison $D\epsilon$, laquelle est donnée de 34 deg. 17 m. 3 sec. avec l'angle ϵPI , ou DPE , de 100 deg. 55 min. 55 sec. puisque (a), cet angle a pour (a) N. 196. mesure la somme $E\gamma D$ de l'ascension droite γD , laquelle est aussi donnée de 10 deg. 55 m. 55 sec. & du quart $E\gamma$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un (b) N. 197. arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ϵP , (prolongé vers M , parce que les angles $IP\epsilon$ & $I\epsilon P$ sont de différente espèce,) on cherche de la manière suivante, le côté ϵI , & l'angle ϵIP .

† Cette ascension droite & cette déclinaison sont prises pour le commencement de l'année 1749. & il en est de même de celles que nous proposerons dans la suite.

426 TRAITE' COMPLET

1^{ent}, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle IPM de 79 deg. 4 min. 5 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle CPI que l'on vient de trouver de 100 deg. 55 min. 55 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le segment PM.

(a) N. 184.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle IPM trouvé de 79 deg. 4 min. 5 sec. - 0.7220635
Logarithme de la tangente du complément de l'hypo-
ténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. - 10.3622166
Logar. de la tangente du complément du segment PM 11.0842801

(b) N. 103. qui (b) donne 85 deg. 17 min. 30 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 4 deg. 42 min. 30 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant ajoutée au côté CP que l'on a trouvé de 55 deg. 42 min. 57 sec. donne 60 deg. 25 min. 27 sec. pour la valeur du segment CPM †.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle CPI, on connoît le segment PM que l'on vient de trouver de 4 deg. 42 min. 30 sec. le segment CPM que l'on vient aussi de trouver de 60 deg. 25 min. 27 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.

* Fig. 174. † Il faut remarquer que si le segment CPM se trouvoit de plus de 90 degrés, la latitude de l'Etoile proposée seroit méridionale. Car, puisque le côté IM du triangle-Sphérique rectangle MIC vaut moins que le quart de la circonférence d'un cercle, & que le côté CPM vaudroit alors plus que le quart de la circonférence d'un cercle, l'hypoténuse CI vaudroit aussi (c) plus que le quart de la circonférence d'un cercle.

(c) N. 236.

DE TRIGONOMETRIE. 427

Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), (a) N. 303.
le côté ϵI qui est le complément de la latitude demandée $B\epsilon$.

Complément du logarithme du sinus du complément	
du segment PM trouvé de 4 deg. 42 min. 30 sec.	0.0014680
Logarithme du sinus du complément du segment	
ϵPM trouvé de 60 deg. 25 min. 27 sec. - -	9.6933532
Logarithme du sinus du complément du côté IP donné	
de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - -	9.9624801

Logar. du sinus du complément du côté ϵI - - 19.6573013

qui (b) donne 27 deg. 1 min. 2 sec. p. m. pour la valeur de ce (b) N. 103.
complément; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée $B\epsilon$, puisque cette latitude est ce complément même.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique oblique ϵIP , on connoît le côté ϵI de 62 deg. 58 min. 58 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude $B\epsilon$ que l'on vient de trouver de 27 deg. 1 min. 2 sec. le côté ϵP que l'on a trouvé de 55 deg. 42 min. 57 sec. avec l'angle ϵPI que l'on a aussi trouvé de 100 deg. 55 min. 55 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'angle ϵIP . (c) N. 189.

Complément du logarithme du sinus du côté ϵI	
trouvé de 62 deg. 58 min. 58 sec. - - - - -	0.0501857
Logarithme du sinus du côté ϵP trouvé de 55 deg.	
42 min. 57 sec. - - - - -	9.9171136
Logarithme du sinus de l'angle ϵPI trouvé de 100 d.	
55 min. 55 sec. - - - - -	9.9920465
Logarithme du sinus de l'angle ϵIP - - - - -	19.9593458

qui (d) donne 65 deg. 35 min. 37 sec. pour la valeur de cet (d) N. 103.
angle; & par conséquent, pour celle de l'arc $B\delta$ qui (e) en est la (e) N. 196.
mesure. Mais cet arc est le complément de la longitude demandée γB . Donc cette longitude est de 24 deg. 24 min. 23 sec.
& par conséquent, le point B est le 24^{me} d. 24 m. 23 s. du γ .

H h h ij

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 175. 409. On donne l'obliquité $Q\gamma\delta$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite γQD du cœur du Ω (Regulus) marqué * dans Bayer, de 148 deg. 44 min. 30 sec. avec sa déclinaison $D\alpha$ de 13 deg. 11 m. 16 s. vers le septentrion; & il faut trouver la latitude $B\alpha$ de cette Etoile, & sa longitude $\gamma\delta B$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique $\triangle IP$ formé par des cercles pareils à ceux qui forment le triangle $\triangle IP$ * de l'exemple précédent, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté αP de 76 deg. 48 min. 44 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison $D\alpha$ qui est donnée de 13 deg. 11 min. 16 s. avec l'angle αPI , ou DPE , de 121 deg. 15 m. 30 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la différence $D\alpha E$ de l'ascension droite αQD , qui est donnée de 148 deg. 44 min. 30 sec. aux trois quarts $\gamma Q\alpha E$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté αP , (prolongé vers M , parce que les angles $IP\alpha$ & IP sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante, le côté αI , & l'angle αIP .

DE TRIGONOMETRIE. 429

1^{ent}, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle IPM de 58 deg. 44 min. 30 sec. puis- que cet angle est le supplément de l'angle α PI que l'on vient de trouver de 121 deg. 15 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière sui- vante (a), le segment PM.

(a) N. 284

Complémens du logarithme du sinus du complément de l'angle IPM trouvé de 58 deg. 44 min. 30 sec.

Logarithme de la tangente du complément de l'hypo- ténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec.

Logarithme de la tangente du complément du seg- ment PM

qui (b) donne 77 deg. 18 min. 1 sec. pour la valeur de ce com- plément; & par conséquent, 22 deg. 42 min. 59 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant ajoutée au côté α P que l'on a trouvé de 76 deg. 48 min. 44 sec. donne 89 deg. 30 min. 43 sec. pour la valeur du segment α PM.

(b) N. 1024

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle α IP, on connoît le segment PM que l'on vient de trouver de 12 d. 41 m. 59 f. le segment α PM que l'on vient aussi de trouver de 89 deg. 30 m. 43 f. avec le côté IP qui est donné de 23 d. 28 m. 30 f. Ainsi, l'on cherche de la ma- nière suivante (c), le côté α I qui est le complé- ment de la latitude demandée Ba.

(c) N. 303

430 TRAITE' COMPLET

Complément du logarithme du sinus du complément du segment PM trouvé de 12 deg. 41 min. 59 sec.	0.0107568
Logarithme du sinus du complément du segment aPM trouvé de 89 deg. 30 min. 43 sec.	7.9302905
Logarithme du sinus du complément du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	9.9624801
Logarithme du sinus du compléments du côté aI	17.9035274

(a) N. 103. qui (a) donne 0 deg. 27 min. 32 sec. p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, pour celle de la latitude demandé B^a, puisque cette latitude est ce complément même.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique oblique quangle aIP, on connoît le côté aI de 89 deg. 32 min. 28 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude B^a que l'on vient de trouver de 27 min. 32 sec. le côté aP que l'on a trouvé de 76 deg. 48 min. 44 sec. avec l'angle aPI que l'on a aussi trouvé de 121 deg. 15 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (b), l'angle aIP.

Complément du logarithme du sinus du côté aI trouvé de 89 deg. 32 min. 28 sec.	0.0060140
Logarithme du sinus du côté aP trouvé de 76 deg. 48 min. 44 sec.	9.9883929
Logarithme du sinus de l'angle aPI trouvé de 121 d. 15 min. 30 sec.	9.9318830
Logarithme du sinus de l'angle aIP	29.9201899

(c) N. 103. qui (c) donne 56 deg. 29 min. 16 sec. p. m. pour la valeur de cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'arc \widehat{CB} qui (d) en est la mesure. Or, puisque l'arc \widehat{CB} est de 56 deg 20 min. 16 sec. l'arc \widehat{YCB} qui est la longueur demandée, est de 146 d. 20 min. 16 sec. & par conséquent, le point B est le 26^{me} deg. 20 min. 16 sec. du Q.

AUTRE EXEMPLE.

410. On donne l'obliquité $\gamma\epsilon\zeta^*$ de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite $\gamma Q\Delta D$ de l'Aîle de la Vierge marquée, dans Bayer, de 192 deg. 25 min. 48 sec. avec sa déclinaison D , de 12 deg. 18 min. 13 sec. vers le septentrion; & il faut trouver la latitude de B , de cette Etoile, & sa longitude $\gamma\epsilon\zeta\Delta B$. Fig. 176.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique IP formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles des deux exemples précédents, on connoît le côté IP de 23 d. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: le côté IP de 77 deg. 41 min. 47 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D , qui est donnée de 12 deg. 18 min. 13 sec. avec l'angle PI , ou DPE , de 77 deg. 34 min. 12 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la différence DE de l'ascension droite $\gamma Q\Delta D$, laquelle est donnée de 192 deg. 25 min. 48 sec. aux trois quarts $\gamma Q\Delta E$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté P , (qu'il rencontrera en un point M , parce que les angles I, P , & IP sont de même espèce,) on cherche de la manière suivante le côté I , & l'angle IP . (a) N. 196. (b) N. 297.

431 TRAITE' COMPLET

¹ent, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisq. cette hypoténuse est donnée de cette grandeur ; avec l'angle IPM, ou PI, que l'on vient de trouver de 77 deg. 34 min. 12 sec. Ainsi, l'on (a) N. 284. cherche de la manière suivante (a) le segment MP.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle IPM trouvé de 77 deg. 34 min. 12 sec. 0.6670636
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. 10.3622166

Logar. de la tang. du complément du segment MP 11.0292806
 (b) N. 203. qui (b) donne 84 deg. 39 min. 34 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 5 deg. 20 min. 26 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant retranchée du côté IP que l'on a trouvé de 77 deg. 41 min. 47 sec. laisse 72 deg. 21 min. 21 sec. pour la valeur du segment M.

²ent, dans le triangle-Sphérique oblique IP, on connoît le segment MP que l'on vient de trouver de 5 deg. 20 min. 26 sec. le segment M que l'on vient aussi de trouver de 72 deg. 21 min. 21 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. (c) N. 303. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le côté I qui est le complément de la latitude demandée B.

Complément du logar. du sinus du complément du segment MP trouvé de 5 deg. 20 min. 26 sec. - 0.0018891
Logar. du sinus du complément du segment M trouvé de 72 deg. 21 min. 21 sec. - - - - 9.4815924
Logar. du sinus du complément du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - - 9.9624801

Logar. du sinus du complément du côté I - - 29.4419618
 (d) N. 203. qui (d) donne 16 deg. 12 min. 51 sec. pour la valeur de ce complément ;

complément; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée, puisque cette latitude est ce complément même.

3^{em} enfin, dans le triangle-Sphérique oblique $\triangle IP$, on connoît le côté IP de 73 deg. 47 min. 9 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude B , que l'on vient de trouver de 16 deg. 12 min. 51 sec. le côté PI que l'on a trouvé de 77 deg. 41 min. 47 sec. avec l'angle $\angle PI$ que l'on a aussi trouvé de 77 deg. 34 min. 12 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'angle $\angle IP$.

(a) N. 189.

Complément du logar. du sinus du côté IP trouvé de 73 deg. 47 min. 9 sec.	0.0176271
Logar. du sinus du côté PI trouvé de 77 deg. 41 min. 47 sec.	9.9899088
Logar. du sinus de l'angle $\angle PI$ trouvé de 77 deg. 34 min. 12 sec.	9.9896987
Logar. du sinus de l'angle $\angle IP$	9.9972346

qui (b) donne 96 deg. 27 min. 32 sec. p. m. pour la valeur (b) N. 183. de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc QB , qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc QB (c) N. 196. est de 96 deg. 27 min. 32 sec. l'arc QB qui est la longitude demandée, est de 186 deg. 27 min. 32 sec. & par conséquent, le point B est le 6^{em} deg. 27 min. 32 de ...

AUTRE EXEMPLE.

411. On donne l'obliquité QV de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite QV de l'Etoile Scheat Pegasi marquée dans Bayer, de 342 deg. 54 min. 57 sec. avec sa déclinaison DE de 26 deg. 41 min. 41 sec. vers le septentrion; & il faut trouver la latitude B de cette Etoile, & sa longitude VB .

Fig. 177.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique $\triangle IP$ formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles des trois exemples précédents, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur : le côté ϵP de 63 deg. 17 min. 19 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison DE qui est donnée de 26 deg. 42 min. 41 sec. avec l'angle ϵPI , ou DPE , de 72 deg. 54 min. 57 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure l'excès DE de l'ascension droite $\gamma Q \triangle ED$ qui est donnée de 342 deg. 54 min. 57 sec. sur les trois quarts $\gamma Q \triangle E$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ϵP , (qu'il rencontrera en un point M , parce que les angles $I \epsilon P$, & $IP \epsilon$ sont de même espèce,) on cherche de la manière suivante le côté ϵI , & l'angle ϵIP .

(a) N. 196. 57 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure l'excès DE de l'ascension droite $\gamma Q \triangle ED$ qui est donnée de 342 deg. 54 min. 57 sec. sur les trois quarts $\gamma Q \triangle E$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté ϵP , (qu'il rencontrera en un point M , parce que les angles $I \epsilon P$, & $IP \epsilon$ sont de même espèce,) on cherche de la manière suivante le côté ϵI , & l'angle ϵIP .

(b) N. 27.

1^{er}, dans le triangle Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M , on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle IPM , ou ϵPI , que l'on vient de trouver de 72 deg. 54 min. 57 sec. Ainsi, (c) N. 84. l'on cherche de la manière suivante (c), le segment MP .

DE TRIGONOMÉTRIE. 435

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle IPM trouvé de 72 deg. 54 min. 57 sec. 0.5319839

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. - 10.3622166

Logar. de la tangente du compl. du segment MP - 10.8942001
qui (a) donne 82 deg. 43 min. 45 sec. pour la valeur de ce (a) N. 1034
complément; & par conséquent, 7 deg. 16 min. 15 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté CP que l'on a trouvé de 63 deg. 17 min. 19 sec. laissera 56 deg. 1 min. 4 sec. pour la valeur du segment CM.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle IP, on connoît le segment MP que l'on vient de trouver de 7 deg. 16 min 15 sec. le segment CM que l'on vient aussi de trouver de 56 deg. 1 min. 4 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (b), le (b) N. 3031
côté CI qui est le complément de la latitude demandée BC.

Complément du logar. du sinus du complément du segment MP trouvé de 7 deg. 16 min. 15 sec. 0.6035063

Logar. du sinus du complément du segment CM trouvé de 56 deg. 1 min. 4 sec. - - - 9.7473618

Logar. du sinus du complément du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - 9.9624801

Logar. du sinus du compl. du côté CI - - - - 10.97133482

qui (c) donne 31 deg. 7 min. 12 sec. p. m. pour la valeur de ce (c) N. 1035
complément; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée BC; puisque cette latitude est ce complément même.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle IP, on connoît le côté CI de 38 deg. 52 min. 48 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude BC que l'on vient de
I i i ij

436. TRAITE' COMPLET -

trouver de 31 deg. 7 min. 12 sec. le côté ϵP que l'on a trouvé de 63 deg. 17 min. 19 sec. avec l'angle ϵPI que l'on a aussi trouvé de 72 deg. 54 min. 57 sec. Ainsi, l'on cherche (a) N. 189. de la manière suivante (a), l'angle ϵIP .

Complément du logar. du sinus du côté ϵI trouvé de 58 deg. 52 min. 48 sec.	-	-	-	0.0674823
Logarithme du sinus du côté ϵP trouvé de 63 deg. 17 min. 19 sec.	-	-	-	9.9509886
Logarithme du sinus de l'angle ϵPI trouvé de 72 deg. 54 min. 57 sec.	-	-	-	9.9804007
Logar. du sinus de l'angle ϵIP	-	-	-	19.9988716

- (*) N. 103. qui (b) donne 94 deg. 7 min. 42 sec. p. m. pour la valeur de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc
- (c) N. 196. $BY\phi$ qui (c) en est la mesure. Mais, puisque l'arc $BY\phi$ est de 94 deg. 7 min. 42 sec. l'arc $\gamma\phi B$ est de 85 deg. 52 min. 18 sec. Ainsi, si l'on ajoute ce dernier arc aux trois quarts $\gamma\phi\omega$ de la circonférence de l'Ecliptique, on a 235 deg. 52 min. 18 sec. pour la longitude demandée $\gamma\phi\omega\gamma\phi B$; & par conséquent, le point B est le 25^{me} deg. 52 min. 18 sec. des χ .

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 178. 413. Enfin, on donne l'obliquité $Q\gamma\phi$ de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite $\gamma Q\omega D$ du cœur du m (Antares) marqué a dans Bayer, de 243 deg. 30 min. 52 sec. avec sa déclinaison $D\omega$ de 25 deg. 50 min. 58 sec. vers le midi; & il faut trouver la latitude $B\omega$ de cette Etoile, & sa longitude $\gamma\phi\omega B$.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique ωip formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles des exemples précédents, on connoît le côté ωp de 23 deg.

28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle p de l'Equateur au Pôle i de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur : le côté ap de 64 deg. 9 min. 2 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D qui est donnée de 25 deg. 50 min. 58 sec. avec l'angle π , ou DpQ , de 153 deg. 30 min. 57 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure (a) N. 196. l'excès QAD de l'ascension droite γQAD qui est donnée de 243 deg. 30 min. 57 sec. sur le quart γQ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc iM d'un (b) N. 297. grand cercle, tiré du sommet de l'angle i perpendiculairement au côté ap , (prolongé vers M , parce que les angles ipa , & iap sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante le côté ai , & l'angle π .

1^{er}, dans le triangle-Sphérique Mip qui [c] est rectangle en M , on connoît l'hypoténuse ip de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur ; avec l'angle ipM de 26 deg. 29 min. 3 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle π , ou DpQ , que l'on vient de trouver de 153 deg. 30 min. 57 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le segment pM . (c) N. 284.

Complémens du logarithme du sinus du complément.

de l'angle ipM trouvé de 26 deg. 29 min. 3 sec. 0.0481491

Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse ip donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. - 10.3622166

Logar. de la tangente du compl. du segment pM - 10.4103657

qui (d) donne 68 deg. 45 min. 29 sec. $p. m.$ pour la valeur de (d) N. 103.

ce complément ; & par conséquent, 21 deg. 14 min. 31 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant ajoutée au côté ap , que l'on a trouvé de 64 deg. 9 min. 2 sec. donne 85 deg. 23 min. 33 sec. pour la valeur du segment apM .

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle ap , on connoît le segment pM que l'on vient de trouver de 21 deg. 14 min. 31 sec. le segment apM que l'on vient aussi de trouver de 85 deg. 23 min. 33 sec. avec le côté ip qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 303. l'on cherche de la manière suivante (α), le côté ai qui est le complément de la latitude demandée $B\alpha$.

Complément du logar. du sinus du complément du segment pM trouvé de 21 deg. 14 min. 31 sec.	0.6305567
Logar. du sinus du complément du segment apM trouvé de 85 deg. 23 min. 33 sec.	8.9048738
Logar. du sinus du complément du côté ip donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	9.9624801
Logar. du sinus du complément du côté ai	8.8979106

(b) N. 103. qui (b) donne 4 deg. 32 min. 3 sec. *p. m.* pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, pour celle de la latitude demandée $B\alpha$, puisque cette latitude est ce complément même.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ap , on connoît le côté ai de 85 deg. 27 min. 57 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude $B\alpha$ que l'on vient de trouver de 4 deg. 32 min. 3 sec. le côté ap que l'on a trouvé de 64 deg. 9 min. 2 sec. avec l'angle api que l'on a aussi trouvé de 153 deg. 30 min. 57 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'angle ap .

(c) N. 289.

Complément du logar. du sinus du côté a trouvé de	
85 deg. 27 min. 57 sec.	0.0013613
Logar. du sinus du côté a p trouvé de 64 deg. 9 min.	
2 sec.	9.9542149
Logarithme du sinus de l'angle a p i trouvé de 153 d.	
30 min. 57 sec.	9.6492866
Logar du sinus de l'angle a ip	19.6048628

qui (a) donne 23 deg. 44 min. 25 sec. p. m. pour la valeur de (a) N. 103.
cet angle ; & par conséquent, pour celle de l'arc B^{yo} qui (b) en est (b) N. 195.
la mesure. Mais, puisque l'arc B^{yo} est de 23 deg. 44 min. 25 sec.
l'arc ~~V⁶⁹~~B qui est la longitude demandée, est de 246 deg.
15 min. 35 sec. & par conséquent, le point B est le 6me deg.
15 min. 35 sec. du \rightarrow .

SCHOLIE.

413. C'est en cherchant de cette manière les latitudes & les longitudes des Etoiles, que les Astronomes en ont construit des Catalogues dont le plus célèbre est celui de Bayer. Et comme cet Usage est un des plus considérables de l'Astronomie, nous y avons proposé des exemples d'Etoiles situées dans différents quarts de l'Ecliptique, & qui déclinent les unes vers un Pôle, & les autres vers un autre ; non-seulement afin de ne laisser rien à desirer sur cet article, mais aussi pour faire voir les différentes manières dont il faut s'y prendre pour résoudre les Questions astronomiques, suivant les différents points du Ciel auxquels les Etoiles dont il s'agit sont situées.

XVIII. USAGE.

414. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la latitude d'une Etoile & sa longitude, trouver la déclinaison de cette Etoile, & son ascension droite.

• Fig. 179. On donne l'obliquité $Q\gamma\delta$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. la latitude B_a de la Chevre marquée * dans *Bayer*, de 22 d. 51 min. 47 sec. avec sa longitude γB de 78 deg. 21 min. 8 sec. & il faut trouver la déclinaison D_a de cette Etoile, & son ascension droite γD .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique aIP formé par des cercles pareils à ceux qui forment les triangles de l'Usage précédent, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 m. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur : le côté aI de 67 deg. 8 min. 13 sec. puisque ce côté est le complément de la latitude B_a qui est donnée de 22 deg. 51 min. 47 sec. avec l'angle aIP de 11 deg. 38 min. 52 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure le complément $B\delta$ de la longitude γB qui est donnée de 78 deg. 21 min. 8 sec. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc PM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté aI , (qu'il rencontrera en un point M , parce que les angles P_aI , & PI_a sont de même espece,) on cherche de la manière suivante le côté aP , & l'angle aPI .

^{1^{ent}} Dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M , on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle MIP , ou aIP , que l'on vient de trouver

DE TRIGONOMETRIE. 441

trouver de 11 deg. 38 min. 52 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le segment IM. (a) N. 184

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle MIP trouvé de 11 deg. 38 min. 52 sec. 0.0090368
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. 10.3622166

Logar. de la tangente du compl. du segment IM - 10.3712534
qui (b) donne 66 deg. 57 min. 27 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 23 deg. 2 min. 33 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté aI, que l'on a trouvé de 67 deg. 8 min. 13 sec. laisse 44 deg. 5 min. 40 sec. pour la valeur du segment Ma. (b) N. 185

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle aIP, on connoît le segment IM que l'on vient de trouver de 23 deg. 2 min. 33 sec. le segment Ma que l'on vient aussi de trouver de 44 deg. 5 min. 40 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le côté aP qui est le complément de la déclinaison demandée Da. (c) N. 303

Complément du logar. du sinus du complément du segment IM trouvé de 23 deg. 2 min. 33 sec. - 0.0361109
Logar. du sinus du complément du segment Ma trouvé de 44 deg. 5 min. 40 sec. - 9.8562426
Logar. du sinus du compl. du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - 9.9624801

Logar. du sinus du complément du côté aP - 19.8548326
qui (d) donne 45 deg. 42 min. 51 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la déclinaison demandée Da, puisque cette déclinaison est ce complément même. (d) N. 103

K k k

441 TRAITE' COMPLET

3^{ent} enfin , dans le triangle-Sphérique obli-
 quangle α IP, on connoît le côté α P de 44 deg.
 17 min. 9 sec. puisque ce côté est le complé-
 ment de la déclinaison D α que l'on vient de
 trouver de 45 deg. 42 min. 51 sec. le côté
 α I que l'on a trouvé de 67 deg. 8 min. 13 sec.
 avec l'angle α IP que l'on a aussi trouvé de
 11 deg. 38 min. 52 sec. Ainsi, l'on cherche
 (a) N. 189. de la manière suivante (a), l'angle α PI.

Complément du logar. du sinus du côté α P trouvé	
de 44 deg. 17 min. 9 sec.	0.1559964
Logar. du sinus du côté α I trouvé de 67 deg. 8 min.	
13 sec.	9.9644652
Logar. du sinus de l'angle α IP trouvé de 11 deg.	
38 min. 52 sec.	9.3051248
Logar. du sinus de l'angle α PI	19.4255864

- (b) N. 103. qui (b) donne 164 deg. 32 min. 52 sec. pour la valeur de cet
 angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc E γ D
 (c) N. 196. qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc E γ D est de 164 deg.
 32 min. 52 sec. l'arc γ D qui est l'ascension droite demandée,
 est de 74 deg. 32 min. 52 sec.

SCHOLIE I.

415. On peut voir par la manière dont nous
 avons résolu les différentes Questions de l'usage
 précédent, & par celle dont nous venons de ré-
 soudre cette dernière, ce qu'il faudroit faire si
 l'on proposoit une Etoile située dans un quart de
 l'Ecliptique différent de celui dans lequel se trou-
 ve l'Etoile que nous venons de prendre pour
 exemple, ou une Etoile dont la latitude seroit
 méridionale.

SCHOLIE II.

416. Lorsque l'on connoîtra la latitude & la longitude d'une Planette quelconque, on pourra se servir de la manière suivante, de ce qui est enseigné dans cet Usage, pour trouver la Parallaxe de hauteur de cette Planette.

On observera avec la dernière exactitude, & l'instant auquel la Planette dont on voudra connoître la Parallaxe de hauteur passera par le Méridien, & la hauteur de cette Planette sur l'horison à cet instant. On cherchera ensuite de la même manière dont nous venons de le faire dans cet Usage, quelle sera la déclinaison de cette même Planette à ce même instant; & si cette déclinaison est méridionale, on la retranchera de la hauteur de l'Equateur; mais si elle est septentrionale, on l'ajoutera à cette même hauteur; & la différence, ou la somme, sera la vraie hauteur de la Planette proposée. Enfin, après avoir corrigé la hauteur observée; (c'est-à-dire, après en avoir retranché ce qu'il conviendra d'en ôter, suivant la Table des réfractions qui est à la fin de ce Traité), on soustraira de cette vraie hauteur cette hauteur corrigée, & le reste sera la Parallaxe demandée †.

SCHOLIE III.

417. Enfin, lorsque l'on aura trouvé par la Scholie précédente, la Parallaxe de hauteur

† C'est par ce qui est enseigné dans cette Scholie que l'on a construit la Table des Parallaxes du Soleil, qui est à la fin de ce Traité.

444 TRAITE' COMPLET

- Fig. 152. d'une Planette quelconque S^* , & par conséquent la vraie hauteur HCS de cette Planette sur l'horison astronomique HO , on connoitra dans le triangle rectiligne STC , l'angle CST qui sera cette Parallaxe, avec l'angle SCT qui sera le complément de cette vraie hauteur. Ainsi, en prenant le rayon CT de la Terre pour l'unité, (a) N. 119. on cherchera de la manière suivante (a), la distance CS du centre S de la Planette dont il s'agira au centre C de la Terre.

Complément du logarithme du sinus de l'angle	
CST , parallaxe connue de la Planette proposée S	* * *
Logar. du sinus de l'angle STC , supplément des	
angles connus EST & SCT - - - - -	* * *
Logarithme du demi-diamètre CT de la Terre,	
que l'on prendra pour l'unité - - - - -	9.0000000

- Logarithme de la distance demandée CS - - * * *
- (b) N. 103. qui (b) donnera le nombre de demi-diamètres CT que cette distance contiendra.

XIX. U S A G E.

418. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite & la longitude d'une Etoile, trouver la déclinaison & la latitude de cette Etoile.

- Fig. 180. ON donne l'obliquité $Qr\phi^*$ de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite rD de la Corne boréale du γ marquée ϵ dans Bayer, de 77 deg. 36 min. 32 sec. avec sa longitude rB de 79 deg. 4 min. 6 sec. & il faut trouver la déclinaison D^{ϵ} de cette Etoile, & sa latitude B_{ϵ} .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique $\triangle IP$, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur: l'angle $\angle IP$ de 10 deg. 55 min. 54 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure le complément (a) N. 196. $B\epsilon$ de la longitude γB , qui est donnée de 79 deg. 4 min. 6 sec. avec l'angle $\angle PI$, ou DPE , de 167 deg. 36 min. 32 sec. puisque (b) cet angle a pour mesure la somme $E\gamma D$ (b) N. 196. de l'ascension droite γD , qui est donnée de 77 deg. 36 min. 32 sec. & du quart $E\gamma$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi, après avoir supposé (c) un arc PM d'un grand cercle, tiré (c) N. 197. du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté $\angle I$, (qu'il rencontre en un point M , parce que les angles $P\epsilon I$ & $PI\epsilon$ sont de même espece,) on cherche de la manière suivante les côtés $\angle P$ & $\angle I$ qui sont les complémens, l'un de la déclinaison demandée $D\epsilon$, & l'autre de la latitude demandée $B\epsilon$.

1^{er}, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M , on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle MIP , ou $\angle IP$, que l'on a trouvé de 10 deg. 55 min. 54 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (d), l'an- (d) N. 183. gle IPM .

Complément du logar. du sinus du complément de
l'hypoténuse IP donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. 0.0375199

Logar. de la tangente du compl. de l'angle MIP
trouvé de 10 deg. 55 min. 54 sec. - - - 10.7141211

Logar. de la tangente de l'angle IPM - - - 10.7516411

- (a) N. 103. qui (a) donne 79 deg. 57 min. 14 sec. p. m. pour la valeur de cet angle; laquelle étant retranchée de l'angle CPI, que l'on a trouvé de 167 deg. 36 min. 32 sec. laisse 87 deg. 39 min. 18 sec. pour la valeur de l'angle CPM.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle CPI, on connoît l'angle au sommet IPM que l'on vient de trouver de 79 deg. 57 min. 14 sec. l'autre angle au sommet CPM que l'on vient aussi de trouver de 87 deg. 39 min. 18 sec. avec le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. Ainsi, l'on cherche de la ma-

- (b) N. 305. nière suivante (b), le côté CP qui est le complément de la déclinaison demandée DC.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle IPM
trouvé de 79 deg. 57 min. 14 sec. - - - 0.7583514

Logarithme du sinus du complément de l'angle CPM
trouvé de 87 deg. 39 min. 18 sec. - - - 8.6118966

Logarithme de la tangente du compl. du côté IP
donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - 10.3621166

Logar. de la tangente du complément du côté CP - 10.7324656

- (c) N. 103. qui (c) donne 28 deg. 22 min. 22 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la déclinaison demandée DC.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle CPI, on connoît l'angle CPI que l'on a trouvé de 10 deg. 55 min. 54 sec. l'angle CIP que l'on a aussi trouvé de 167 deg. 36 min. 32 sec. avec le côté CP dont on vient de trou-

DE TRIGONOMETRIE. 447

ver le complément Dc de 28 deg. 22 min. 32 2 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté cI qui est le complément (a) N. 291. de la latitude demandée Bc.

Complément du logarithme du sinus de l'angle cIP	
trouvé de 10 deg. 55 min. 54 sec. - - - -	0.7220744
Logarithme du sinus de l'angle cPI trouvé de 167 d. 36 min. 32 sec. - - - -	9.3315968
Logar. du sinus du côté cP trouvé de 61 deg. 37 min. 38 sec. - - - -	9.9444207
Logar. du sinus du côté cI - - - -	29.9980919

qui (b) donne 84 deg. 37 min. 59 sec pour la valeur de ce côté; (b) N. 103. & par conséquent, 5 deg. 22 min. 1 sec. pour celle de la latitude demandée Bc.

S C H O L I E.

419. Si pour résoudre le triangle-Sphérique obliquangle cIP * on avoit fait passer l'arc per- * Fig. 180. pendiculaire par le sommet de l'angle I, cet arc auroit rencontré le côté cP prolongé vers m, parce que les angles IPc & IcP sont de différente espece. Ainsi il auroit fallu chercher (c) l'angle (c) N. 283. PIm du triangle-Sphérique mPI qui [c] auroit été rectangle en m; & dont on auroit connu l'hypoténuse IP qui est donnée, avec l'angle mPI qui auroit été le supplément de l'angle DPE. On auroit ensuite ajouté cet angle PIm à l'angle cIP, afin d'avoir l'angle cIm; & l'on auroit cherché (d) le côté cI du triangle-Sphérique obli- (d) N. 315. quangle cIP, dans lequel on auroit connu les angles au sommet PIm, & cIm, avec le côté IP. Enfin, l'on auroit aussi cherché (e) le côté cP de ce (e) N. 291.

même triangle; & l'on auroit trouvé pour ces deux côtés les mêmes nombres que nous avons trouvés dans cet Usage.

Mais, si l'on avoit proposé une Etoile située dans le second, dans le troisième, ou dans le dernier quart de l'Ecliptique, on auroit vu par les exemples du 17^{me} Usage, la manière dont il auroit fallu s'y prendre pour connoître les angles ϵ IP, & ϵ PI; & l'on auroit ensuite cherché de la même manière dont nous venons de le faire dans ce 19^{me} Usage, ou dans cette Scholie, les compléments ϵ P, & ϵ I, de la déclinaison & de la latitude demandées.

XX. U S A G E.

420. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite & la latitude d'une Etoile, trouver la déclinaison, & la longitude de cette Etoile.

* Fig. 181. ON donne l'obliquité $Q\gamma\delta^*$ de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite γD de l'œil du γ (*Aldebaran*) marqué * dans Bayer, de 65 deg. 22 min. 51 sec. avec sa latitude B_* qui est méridionale, de 5 deg. 29 m. 15 sec. & il faut trouver la déclinaison D_* de cette Etoile, & sa longitude γB .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique ϵ IP, on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique,

que, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté α BI de 95 deg. 29 min. 15 sec. puisque ce côté est la somme de la latitude B_{α} qui est donnée de 5 deg. 29 min. 15 sec. & du quart BI de la circonférence du cercle de latitude de l'Etoile proposée; avec l'angle α PI, ou DPE; de 155 deg. 22 min. 51 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la somme $E\gamma D$ de l'ascension droite γD qui est donnée de 65 deg. 22 min. 51 sec. & du quart $E\gamma$ de la circonférence de l'Equateur. Ainsi après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté α P, (prolongé vers M, parce que les angles IP_{α} , & $I_{\alpha}P$ sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante, le côté α P, & l'angle α IP.

1^{re}, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M; on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle MPI de 24 deg. 37 min. 9 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle DPE que l'on a trouvé de 155 deg. 22 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le segment PM.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle MPI	
trouvé de 24 d. 37 m. 9 s.	0.0413899
Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse IP	
donnée de 23 deg. 28 m. 30 s.	10.3622166

Logar. de la tang. du compl. du segment PM = 10.4036065
qui (d) donne 68 deg. 27 min. 18 sec. p. p. pour la valeur de (d)N. 103.

même triangle; & l'on auroit trouvé pour ces deux côtés les mêmes nombres que nous avons trouvés dans cet Usage.

Mais, si l'on avoit proposé une Etoile située dans le second, dans le troisième, ou dans le dernier quart de l'Ecliptique, on auroit vu par les exemples du 17^{me} Usage, la manière dont il auroit fallu s'y prendre pour connoître les angles ϵIP , & ϵPI ; & l'on auroit ensuite cherché de la même manière dont nous venons de le faire dans ce 19^{me} Usage, ou dans cette Scholie, les complémens ϵP , & ϵI , de la déclinaison & de la latitude demandées.

XX. U S A G E.

420. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite & la latitude d'une Etoile, trouver la déclinaison, & la longitude de cette Etoile.

* Fig. 181. ON donne l'obliquité $Q\gamma\epsilon$ * de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min. 30 sec. l'ascension droite γD de l'œil du γ (Aldebaran) marqué α dans Bayer, de 65 deg. 22 min. 51 sec. avec sa latitude $B\alpha$ qui est méridionale, de 5 deg. 29 m. 15 sec. & il faut trouver la déclinaison $D\alpha$ de cette Etoile, & sa longitude γB .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique αIP , on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique,

que, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté «BI de 95 deg. 29 min. 15 sec. puisque ce côté est la somme de la latitude B. qui est donnée de 5 deg. 29 min. 15 sec. & du quart BI de la circonférence du cercle de latitude de l'Etoile proposée; avec l'angle «PI, ou DPE, de 155 deg. 22 min. 51 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure la somme EVD de l'ascension droite VD qui est donnée de 65 deg. 22 min. 51 sec. & du quart EV de la circonférence de l'Equateur. Ainsi après avoir supposé (b) un arc IM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle I perpendiculairement au côté «P, (prolongé vers M, parce que les angles IP., & I.P sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante, le côté «P, & l'angle «IP.

1^{ent}, dans le triangle-Sphérique MIP qui [c] est rectangle en M; on connoît l'hypoténuse IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cette hypoténuse est donnée de cette grandeur; avec l'angle MPI de 24 deg. 37 min. 9 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle DPE que l'on a trouvé de 155 deg. 22 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le segment PM.

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle MPI
trouvé de 24 d. 37 m. 9 s. - - - - - 0.0413899

Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse IP
donnée de 23 deg. 28 m. 30 s. - - - - - 10.3622166

Logar. de la tang. du compl. du segment PM - - - 10.4036065
qui (d) donne 68 deg. 27 min. 18 sec. p. p. pour la valeur de (d) N. 103.

ce complément ; & par conséquent , 21 deg. 32 min. 42 sec. pour celle de ce segment.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle $\triangle IP$, on connoît le côté IP qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. le côté BI que l'on a trouvé de 95 deg. 29 min. 15 sec. avec le segment PM que l'on vient de trouver de 21 deg. 32 min. 42 sec. Ainsi, l'on cherche
(a) N. 303. de la manière suivante (a), l'autre segment $\triangle PM$.

Compl. du logar. du sinus du compl. du côté IP	
donné de 23 d. 28 m. 30 s. - - - - -	0.0375199
Logar. du sinus du compl. du côté BI trouvé de	
95 deg. 29 m. 15 s. - - - - -	8.9805874
Logar. du sinus du compl. du seg. PM trouvé de	
21 deg. 32 m. 42 s. - - - - -	9.9685411
Logar. du sinus du compl. du segment $\triangle PM$ - - -	28.9866506

(b) N. 203, qui (b) donne 5 deg. 33 min. 54 sec. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 95 deg. 33 min. 54 sec. pour

(c) N. 239. celle de ce segment ; lequel (c) vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle , puisque dans le triangle-Sphérique $\triangle IM$ qui [c] est rectangle en M , l'hypoténuse BI vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle , & que le côté IM vaut moins que ce quart. Or, puisque le segment $\triangle PM$ est de 95 deg. 33 min. 54 sec. & le segment PM de 21 deg. 32 min. 42 sec. le côté IP , qui est le complément de la déclinaison demandée DA , est de 74 deg. 1 min. 12 sec. & par conséquent, cette déclinaison est de 15 deg. 58 min. 48 sec.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle $\triangle IP$, on connoît le côté BI que l'on a trouvé de 95 deg. 29 min. 15 sec. le côté IP que l'on vient de trouver de 74 deg. 1 min. 12 sec. avec l'angle $\triangle PI$ que l'on a aussi trou-

DE TRIGONOMETRIE. 451
 ré de 155 deg. 22 min. 51 sec. Ainsi, l'on
 cherche de la manière suivante (a), l'angle \angle IP, (a) N. 289.
 ou BI ϕ .

Compl. du logar. du sinus du côté α BI trouvé de
 95 deg. 29 m. 15 s. - - - - - 0.0019949

Logar. du sinus du côté α P trouvé de 74 d. 1 m.
 12 s. - - - - - 9.9828808

Logar. du sinus de l'angle α PI trouvé de 155 deg.
 22 m. 51 sec. - - - - - 9.6197039

Logar. du sinus de l'angle α IP - - - - - 89.6948792

qui (b) donne 23 deg. 43 min. 25 sec. pour la valeur de cet an- (b) N. 103.
 gle; & par conséquent, pour celle de l'arc B ϕ qui (b) en est la (c) N. 194,
 mesure. Or, puisque l'arc B ϕ est de 23 deg. 43 min. 25 sec.
 la longitude demandée \angle B, qui est le complément de cet arc,
 est de 66 deg. 16 min. 35 sec.

SCHOLIE.

421. Si l'on avoit proposé une Etoile située
 dans un quart de l'Ecliptique différent de celui
 dans lequel on trouve l'Etoile que nous avons
 prise pour exemple, on auroit vu par quelqu'un
 des exemples du 17^{me} Usage, ce qu'il auroit fallu
 faire pour connoître l'angle \angle PI *; & l'on auroit * Fig. 121,
 ensuite cherché le côté α P, avec l'angle \angle IP, de la
 même manière dont nous venons de le faire.

XXI. USAGE,

422. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique,
 avec la déclinaison & la longitude d'une Etoile,
 trouver la latitude de cette Etoile, & son ascen-
 sion droite.

ON donne l'obliquité Q γ s * de l'Ecliptique * Fig. 122,
 de 23 deg. 28 min. 30 sec. la déclinaison D γ de

L l lij

Poignée du γ marqué γ dans *Bayer*, de 18 deg. 3 min. 11 sec. vers le septentrion, avec la longitude γB de 29. deg. 40 min. 9 sec. & il faut trouver la latitude $B\gamma$ de cette Étoile, & son ascension droite γD .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique γPI , on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté γP de 71 deg. 56 min. 49 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison $D\gamma$, qui est donnée de 18 deg. 3 min. 11 sec. avec l'angle γIP , ou $BI\odot$, de 60 deg. 19 min. 51 sec. puisque (a) cet angle a pour mesure le complément $B\gamma$ de la longitude $\odot B$ laquelle est donnée de 29 deg. 40 min. 9 sec.

(b) N. 297. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc PM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté γI , (qu'il rencontre en un point M , parce que les angles $PI\gamma$, & $R\gamma I$ sont de même espece,) on cherche de la manière suivante, le côté γI , & l'angle γPI .

1^{ent}, dans le triangle-Sphérique MPI qui [c] est rectangle en M , on connoît l'hypoténuse IP qui est donnée de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'angle MIP , ou γIP , que l'on vient de trouver de 60 deg. 19 min. 51 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le segment IM .

Compl. du logar. du sinus du compl. de l'angle MIP
trouvé de 60 deg. 19 m. 51 s. - - - - 0.3054026

Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse IP
donnée de 23 d. 28 m. 30 s. - - - - 10.3622166

Logar. de la tangente du compl. du segment IM - 10.6676192

qui (a) donne 77 deg. 52 min. 4 sec. p. m. pour la valeur de ce (a)
complément ; & par conséquent, 12 deg. 7 min. 56 sec. pour
celle de ce segment.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle
PI, on connoît le côté IP qui est donné de
23 deg. 28 min. 30 sec, le côté P que l'on
a trouvé de 71 deg. 56 min. 49 sec. avec le
segment IM que l'on vient de trouver de 12 deg.
7 min. 56 sec. Ainsi, l'on cherche de la ma-
nière suivante (b), l'autre segment PM. (b) N. 303.

Complément du logar. du sinus du complément du
côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - 0.0375199

Logar. du sinus du complément du côté P trouvé de
71 deg. 56 min. 49 sec. - - - - 9.4912181

Logar. du sinus du compl. du seg. IM trouvé de
12 deg. 7 min. 56 sec. - - - - 9.9901901

Logar. du sinus du compl. du segment PM - - 29.5189281

qui (c) donne 19 deg. 17 min. 16 sec. p. p. pour la valeur de (c) N. 103.
ce complément ; & par conséquent, 70 deg. 42 min. 44 sec.
pour celle de ce segment ; laquelle étant ajoutée au segment
IM que l'on a trouvé de 12 deg. 7 min. 56 sec. donne 82 deg.
50 min. 40 sec. pour la valeur du côté PI. Or, puisque le côté
PI, qui est le complément de la latitude demandée By, est de
82 deg. 50 min. 40 sec. cette latitude est de 7 deg. 9 min.
20 sec.

3^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique obli-
quangle PI, on connoît le côté P que l'on a
trouvé de 71 deg. 56 min. 49 sec. le côté PI
que l'on vient de trouver de 82 deg. 50 min.
40 sec. avec l'angle IP que l'on a aussi trouvé

454 TRAITE' COMPLET

de 60 deg: 19 min. 51 sec. Ainsi, l'on cher

(a) N. 289. che de la manière suivante (a), l'angle γ PI.

Complém. du logarishme du sinus du côté γ P trouvé	
de 71 deg. 56 min. 49 sec.	0.0219248
Logar. du sinus du côté γ I trouvé de 82 deg. 50 min.	
40 sec.	9.9966043
Logar. du sinus de l'angle γ IP trouvé de 60 deg.	
19 min. 51 sec.	9.9389688

Logar. du sinus de l'angle γ PI - - - - - 9.9574977

(b) N. 103. qui (b) donne 114 deg. 56 min. 13 sec. pour la valeur de cet angle, qui est obtus; & par conséquent, pour celle de l'arc

(c) N. 196. EYD qui (c) en est la mesure. Or, puisque l'arc EYD est de 114 deg. 56 min. 13 sec. l'ascension droite demandée YD est de 24 deg. 56 min. 13 sec.

SCHOLIE.

423. On pourroit s'y prendre aussi de la manière suivante, pour trouver dans le triangle-Sphérique obliquangle γ PI *, le côté γ I, & l'angle γ PI.
- (d) N. 283. Premièrement, on chercheroit (d) l'angle IPM du triangle-Sphérique rectangle MPI dont on connoitroit, de même que dans cet Usage, l'hypoténuse IP, & l'angle MIP. On chercheroit ensuite (e) l'angle au sommet γ PM du triangle-Sphérique obliquangle γ PI dont on connoitroit, de même aussi que dans ce même Usage, les côtés IP & γ P, avec l'autre angle au sommet MPI que l'on viendroit de trouver; & l'on ajouteroit cet angle MPI à l'angle γ PM, afin d'avoir (f) N. 291. l'angle γ PI. Enfin, on chercheroit (f) le côté γ I de ce même triangle dont on connoitroit les angles γ IP & γ PI, avec le côté γ P; & l'on

pourroit pour ce côté γI , de même que pour l'angle γPI , les mêmes nombres que nous venons de trouver dans cet Usage.

Et si l'on proposoit une Etoile située dans le second, dans le troisième, ou dans le dernier quart de l'Ecliptique, on verroit par quelqu'un des exemples du 17^{me} Usage, ce qu'il faudroit faire pour connoître l'angle γIP ; avec l'on chercheroit ensuite le côté γI , avec l'angle γPI , de la même manière dont nous venons de le faire.

XXII. USAGE.

424. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec la déclinaison & la latitude d'une Etoile, trouver l'ascension droite de cette Etoile, & sa longitude.

ON donne l'obliquité $Q\gamma\delta$ * de l'Ecliptique * Fig. 183. de 23 deg. 28 min. 30 sec. la déclinaison D_{α} de l'Etoile polaire marquée α dans *Bayer*, de 87 deg. 58 min. 10 sec. avec sa latitude B_{α} de 66 deg. 4 min. 19 sec. & il faut trouver l'ascension droite γD de cette Etoile, & sa longitude γB .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique αPI , on connoît le côté IP de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque ce côté est la distance du Pôle P de l'Equateur au Pôle I de l'Ecliptique, laquelle est donnée de cette grandeur; le côté αP de 2 deg. 1 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D_{α}

456 TRAITE' COMPLET

qui est donnée de 87 deg. 58 min. 10 sec.
avec le côté aI de 23 deg. 55 min. 41 sec. puis
que ce côté est le complément de la latitude B
qui est aussi donnée de 66 deg. 4 min. 19 sec.
Ainsi, l'on cherche 1^{er} l'angle aPI , de la ma-
(a) N.293. nière suivante (a).

Premièrement,

Valeur donnée du côté IP	-	-	-	-	23 d. 28 m. 30 s.
Valeur trouvée du côté aP	-	-	-	-	2 1 50
Valeur trouvée du côté aI	-	-	-	-	23 55 41
Somme de ces trois côtés	-	-	-	-	49 26 1
Moitié de cette somme	-	-	-	-	24 43 0
Différ. du côté IP à cette moitié	-	-	-	-	1 14 30
Différ. du côté aP à cette même moitié	-	-	-	-	22 41 12

Secondement,

Complément du logar. du sinus du côté IP donné de 23 deg. 28 min. 30 sec.	-	-	-	-	0.3997361
Complément du logar. du sinus du côté aP trouvé de 2 deg. 1 min. 50 sec.	-	-	-	-	1.4506007
Logar. du sinus de la différence du côté IP trouvée de 1 deg. 14 min. 30 sec.	-	-	-	-	8.3338871
Logar. du sinus de la différence du côté aP trouvée de 22 deg. 41 min. 10 sec.	-	-	-	-	9.5862121
Logar. du carré du sinus de la moitié de l'angle aPI	-	-	-	-	19.7714566
Moitié de ce logar. ou logar. du sinus de la moitié de cet angle	-	-	-	-	9.8862283

- (b) N.103. qui (b) donne 50 deg. 18 min. 43 sec. p. p. pour la valeur
de cette moitié ; & par conséquent, 100 deg. 37 min. 26 sec.
pour celle de cet angle. Or, puisque l'angle aPI est de 100 deg.
(c) N.196. 37 min. 26 sec. l'arc EYD qui (-) en est la mesure, est d'un
pareil nombre de degrés ; & par conséquent, l'ascension droite
demandée YD est de 10 deg. 37 min. 26 sec.

DE TRIGONOMETRIE. 457

2^{ans}, l'angle $\angle P$, de la manière suivante (a). (a) N. 189.

Complément du logar. du sinus du côté a I trouvé ;
 de 23 deg. 55 min. 41 sec. - - - - - 0.3919137
 Logarithme du sinus du côté a P trouvé de 2 deg.
 1 min. 50 sec. - - - - - 8.5493993
 Logar. du sinus de l'angle $\angle P$ trouvé de 100 deg.
 37 min. 26 sec. - - - - - 9.9924910

Logar. du sinus de l'angle $\angle P$ - - - - - 28.9358040

qui (b) donne 4 deg. 55 min. 32 sec. pour la valeur de cet an- (b) N. 189.
 gle ; & par conséquent, pour celle de l'arc $B\phi$ qui (c) en est la (c) N. 196.
 mesure. Or, puisque l'arc $B\phi$ est de 4 deg. 55 min. 32 sec.
 la longitude demandée γB , qui est le complément de cet arc,
 est de 85 deg. 4 min. 28 sec.

XXIII. USAGE.

425. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec la déclinaison d'une Etoile, trouver combien de temps cette Etoile demeure sur cet horison.

ON donne la déclinaison D_* du cœur du \odot Fig. 184
 Ω (Régulus) marqué * dans Bayer, de 13 deg.
 11 min. 16 sec. vers le septentrion ; & l'on
 demande combien de temps cette Etoile de-
 meure sur l'horison de Paris.

Solution. Dans le triangle-Sphérique C^*D
 qui est rectangle en D , on connoît le côté D_*
 de 13 d. 11 m. 16 sec. puisque ce côté est donné
 de cette grandeur ; avec l'angle DC_* de 41 d.
 9 m. 50 s. puisque (d) cet angle a pour mesure (d) N. 196.
 le complément OQ de la hauteur OP du
 Pôle P , qui est donnée de 48 d. 50 m. 10 s.

M m m

XXIV. USAGE.

428. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite d'une Etoile, trouver le point de ce cercle qui sera au Méridien en même temps que cette Etoile.

* Fig. 186. ON donne l'obliquité $Q\gamma\delta$ * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite γQD de Régulus de 148 deg. 44 min. 30 sec. & il faut trouver le point C de l'Ecliptique, qui sera au Méridien EPQ en même temps que cette Etoile.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $D\Delta C$ qui est rectangle en D, on connoît l'angle $D\Delta C$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur; avec le côté $D\Delta$ de 31 deg. 15 min. 30 sec. puisque ce côté est le supplément de l'ascension droite γQD , qui est donnée de 148 deg. 44 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 185. l'on cherche de la manière suivante (a), l'hypoténuse $C\Delta$.

Logarithme du sinus du complément de l'angle

$D\Delta C$ donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. 9.9624801

Logar. de la tangente du complément du côté $D\Delta$
trouvé de 31 deg. 15 min. 30 sec. 10.2168014

Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse $C\Delta$ 10.1792815

(b) N. 103. qui (b) donne 56 deg. 30 min. 14 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 33 deg. 29 min. 46 sec. pour celle de cette hypoténuse; laquelle étant retranchée de la moitié $\gamma\delta$ de la circonférence de l'Ecliptique, laisse 146 deg. 30 min. 14 sec. pour l'arc $\gamma\delta C$. Or, puisque l'arc $\gamma\delta C$ est de 146 deg. 30 min. 14 sec. le point C est le 16me deg. 30 min. 14 sec. du Q.

XXV. USAGE.

429. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, celle d'une Etoile quelconque sur cet horison, l'ascension droite & la déclinaison de cette Etoile ; trouver le point de l'Equateur qui étoit au Méridien de ce lieu, à l'instant auquel cette même Etoile étoit à la hauteur proposée.

ON donne la hauteur OP^* du Pôle P sur * Fig. 187. l'horison HO , de 48 deg. 50 min. 10 sec. la hauteur *C de la Corne suivante du γ (*la Lufante du γ*) marqué * dans *Bayer*, observée de 30 degrés dans l'hémisphère oriental ; l'ascension droite γD de cette Etoile, de 28 deg. 16 min. 27 sec. avec sa déclinaison D^* de 22 deg. 15 min. 49 sec. vers le septentrion ; & il faut trouver le point E de l'Equateur, qui étoit au Méridien HZO à l'instant auquel cette même Etoile étoit à cette hauteur *C .

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique *PZ , on connoît le côté *P de 67 deg. 44 min. 11 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D^* qui est donnée de 22 deg. 15 min. 49 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P , qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec le côté Z^* de 60 deg. puisque ce côté est le complément de la hauteur *C de l'Etoile proposée, qui est aussi

XXIV. USAGE.

428. Connoissant l'obliquité de l'Ecliptique, avec l'ascension droite d'une Etoile, trouver le point de ce cercle qui sera au Méridien en même temps que cette Etoile.

* Fig. 186. ON donne l'obliquité $Q\gamma\delta$ * de l'Ecliptique de 23 deg. 28 min. 30 sec. avec l'ascension droite γQD de *Régulus* de 148 deg. 44 min. 30 sec. & il faut trouver le point C de l'Ecliptique, qui sera au Méridien EPQ en même temps que cette Etoile.

Solution. Dans le triangle-Sphérique $D\Delta C$ qui est rectangle en D, on connoît l'angle $D\Delta C$ de 23 deg. 28 min. 30 sec. puisque cet angle est donné de cette grandeur; avec le côté $D\Delta$ de 31 deg. 15 min. 30 sec. puisque ce côté est le supplément de l'ascension droite γQD , qui est donnée de 148 deg. 44 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 285. l'on cherche de la manière suivante (a), l'hypoténuse CD ,

Logarithme du sinus du complément de l'angle

$D\Delta C$ donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. - - - 9.9624501

Logar. de la tangente du complément du côté $D\Delta$
trouvé de 31 deg. 15 min. 30 sec. - - - 10.2168014

Logar. de la tangente du compl. de l'hypoténuse CD - - - 10.1792115

(b) N. 103. qui (b) donne 56 deg. 30 min. 14 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 33 deg. 29 min. 46 sec. pour celle de cette hypoténuse; laquelle étant retranchée de la moitié $\gamma\delta$ de la circonférence de l'Ecliptique, laisse 146 deg. 30 min. 14 sec. pour l'arc $\gamma\delta C$. Or, puisque l'arc $\gamma\delta C$ est de 146 deg. 30 min. 14 sec. le point C est le 146^{me} deg. 30 min. 14 sec. du Q .

XXV. USAGE.

429. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, celle d'une Etoile quelconque sur cet horison, l'ascension droite & la déclinaison de cette Etoile ; trouver le point de l'Equateur qui étoit au Méridien de ce lieu, à l'instant auquel cette même Etoile étoit à la hauteur proposée.

ON donne la hauteur OP * du Pôle P sur * Fig. 187. l'horison HO , de 48 deg. 50 min. 10 sec. la hauteur *C de la Corne suivante du γ (la LUISANTE du γ) marqué * dans *Bayer*, observée de 30 degrés dans l'hémisphère oriental ; l'ascension droite γD de cette Etoile, de 28 deg. 16 min. 27 sec. avec sa déclinaison D_{α} de 22 deg. 15 min. 49 sec. vers le septentrion ; & il faut trouver le point E de l'Equateur, qui étoit au Méridien HZO à l'instant auquel cette même Etoile étoit à cette hauteur *C.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique αPZ , on connoît le côté αP de 67 deg. 44 min. 11 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D_{α} qui est donnée de 22 deg. 15 min. 49 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P , qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec le côté Z_{α} de 60 deg. puisque ce côté est le complément de la hauteur *C de l'Etoile proposée, qui est aussi

462 TRAITE COMPLET

donnée de 30 deg. Ainsi, l'on cherche de la

(a) N. 293, manière suivante (a), l'angle aPZ.

Premièrement,

Valeur trouvée du côté aP	- - - - -	67 d. 44 m. 11 s.
Valeur trouvée du côté PZ	- - - - -	41 9 50
Valeur trouvée du côté Za	- - - - -	60 0 0
Somme de ces trois côtés	- - - - -	168 54 1
Moitié de cette somme	- - - - -	84 27 0
Differ. du côté aP à cette moitié	- - - - -	16 42 49
Differ. du côté PZ à cette même moitié	- - - - -	43 17 10

Secondement,

Complément du logarithme du sinus du côté aP trouvé de 67 deg. 44 min. 11 sec.	- - - - -	0.0336469
Complément du logarithme du sinus du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	- - - - -	0.1816311
Logar. du sinus de la différence du côté aP, trouvée de 16 deg. 42 min. 49 sec. $\frac{1}{2}$	- - - - -	9.4587741
Logar. du sinus de la différence du côté PZ, trouvée de 43 deg. 17 min. 10 sec. $\frac{1}{2}$	- - - - -	9.8360984
Logarithme du carré du sinus de la moitié de l'angle aPZ	- - - - -	19.5107518
Moitié de ce logarithme, ou logarithme du sinus de la moitié de cet angle.	- - - - -	9.7550759

- (b) N. 103, qui (b) donne 34 deg. 40 min. 38 sec. p. p. pour la valeur de cette moitié; & par conséquent, 69 deg. 21 min. 16 sec. pour
 (c) N. 196. celle de cet angle, ou de l'arc EYD qui (c) en est la mesure. Mais, puisque l'arc EYD est de 69 deg. 21 min. 16 sec. & que l'arc YD est donné de 28 deg. 16 min. 27 sec. l'arc EY est de 41 deg. 4 min. 49 sec. Donc, l'arc YQNE est de 318 deg. 55 min. 11 sec. & par conséquent, le point demandé B est le 318^{me} deg. 55 min. 11 sec. de l'Equateur.

AUTRE EXEMPLE.

430. On donne précisément les mêmes choses que dans l'exemple précédent : mais on suppose

que la hauteur $\angle C^*$ de l'Etoile proposée a été ^{Fig. 122.} observée dans l'hémisphère occidental ; & il faut de même trouver le point E de l'Equateur, qui étoit au Méridien HZQ à l'instant auquel cette Etoile étoit à la hauteur proposée.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique $\angle PZ$, on connoît le côté $\angle P$ de 67 deg. 44 min. 11 sec. le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. avec le côté Z de 60 deg. de même que dans le triangle de l'exemple précédent. Ainsi, l'on trouve précisément de la même manière dont on l'a fait dans cet exemple, l'angle $\angle PZ$, & par conséquent l'arc DE de l'Equateur, de 69 deg. 21 min. 16 sec. auquel si l'on ajoute l'arc γD , qui est donné de 28 deg. 16 min. 27 sec. on a le 97^{me} deg. 37 min. 43 sec. de l'Equateur, pour le point de ce cercle qui étoit au Méridien à l'instant proposé.

S C H O L I E.

431. Si après avoir trouvé de la manière dont nous venons de le faire, le point Culminant de l'Equateur à l'instant auquel une Etoile est à une certaine hauteur, c'est-à-dire le point de l'Equateur qui étoit au Méridien à l'instant auquel on a observé la hauteur d'une certaine Etoile, on prend la différence de ce point à l'ascension droite du Soleil, cette différence sera la distance de cet Astre au Méridien à l'instant auquel on aura fait cette observation ; & par conséquent, si l'on réduit cette différence en temps, on connoîtra l'heure qu'il étoit à cet instant.

- * Fig. 137. Ainsi, si l'ascension droite γ QS* du Soleil avoit été, par exemple, de 284 deg. 30 min. 11 s. au midi du jour, auquel on a observé la Luitante du γ élevée de 30 d. sur l'horison oriental HCO, la distance SE de cet Astre au Méridien HZO, auroit été à cet instant de 34 deg. 12 5. min. vers l'occident; & par conséquent, il auroit été 2 heures 17 min. 40 sec. après midi, à l'instant auquel on auroit fait cette observation. Mais, si cette même hauteur avoit été observée dans l'hémisphère occidental, l'arc EQS* auroit alors été de 186 deg. 52 min. 28 sec. & par conséquent, il auroit été 11 heures 32 min. 30 sec. p. p. du soir, à l'instant auquel on auroit observé cette dernière hauteur.

Mais il faut remarquer 1^{ent}, que cette manière de trouver l'heure n'est jamais parfaitement juste; parce que l'ascension droite du Soleil augmentant d'instant en instant, jusqu'à un degré environ en 24 heures, on ne peut la connoître en rigueur, qu'en connoissant l'heure, qui est précisément ce que l'on cherche. L'erreur ne peut cependant pas être de 4 minutes d'heures, puisqu'un degré de l'Equateur étant réduit en temps, ne produit que ce nombre.

2^{ent}, que quoique cette manière de connoître l'heure ne soit pas d'une précision rigoureuse; cependant, si après avoir pris la différence 9 heures 14 min. 50 sec. du premier temps 2 heures 17 min. 40 sec. au dernier 11 heures 32 min. 30 sec. on ajoute à ce premier temps, ou l'on soustrait
du

du dernier, la moitié 4 heures 37 min. 25 sec. de cette différence, la somme, ou le reste, 6 heures 55 min. 5 sec. sera l'instant juste du passage de l'Etoile proposée par le Méridien, tel qu'on l'auroit trouvé par le N^o 402.

XXVI. USAGE.

432. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec l'ascension droite & la déclinaison d'une Etoile; trouver la hauteur de cette Etoile sur cet horison, à un temps donné.

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur l'horison HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. l'ascension droite γ D de la *Luisante* du γ de 28 d. 16 min. 27 sec. avec sa déclinaison D* de 22 deg. 15 min. 49 sec. vers le septentrion; & il faut trouver quelle étoit la hauteur *C de cette Etoile sur cet horison HO, le 7. du mois de Janvier de l'année 1749, à deux heures après midi. * Fig. 189,

Solution. Après avoir connu par quelques Ephémérides, ou par les Tables de M. De Cassini, que le 7. du mois de Janvier de l'année 1749, à deux heures après midi, le lieu du Soleil étoit le 17^{me} deg. 32 min. 13 sec. du γ , on cherche (a) quelle devoit être son ascension droite à cet instant; & l'on trouve qu'elle étoit de 289 deg. 0 m. 35 sec. Ainsi, le 7. du mois de Janvier de l'année 1749, à 2 heures après midi,

466 TRAITE' COMPLET

le 28⁹^{me} d. 0 m. 35 f. de l'Equateur étoit éloigné du Méridien HZO de 30 deg. vers l'occident; & par conséquent, le point E de l'Equateur qui étoit au Méridien à cet instant, étoit son 319^{me} d. 0 m. 35 f. Mais, puisque le point E étoit le 319^{me} d. 0 m. 35 f. de l'Equateur, l'arc E γ étoit de 40 deg. 59 min. 25 sec. & puisque l'arc γ D est donné de 28 deg. 16 min. 27 sec. l'arc total E γ D, & par conséquent

(a) N. 196. l'angle α PZ dont (a) cet arc est la mesure, étoient chacun de 69 deg. 15 min. 52 sec.

Ainsi, dans le triangle-Sphérique obliquangle α PZ, on connoît l'angle α PZ de 69 deg. 15 min. 52 sec. puisque l'on vient de le trouver de cette grandeur : le côté α P de 67 deg. 44 min. 11 sec. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D α qui est donnée de 22 deg. 15 min. 49 sec. avec le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P qui est aussi donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec.

(b) N. 197. Par conséquent, si l'on suppose (b) un arc ZM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté α P, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles ZP α & Z α P sont de même espece,) on cherche de la manière suivante le côté Z α qui est le complément de la hauteur demandée α C.

1^{ent}, dans le triangle-Sphérique MZP qui [c] est rectangle en M, on connoît l'angle MPZ, ou α PZ, que l'on vient de trouver de

DE TRIGONOMETRIE. 467

69 deg. 15 min. 52 sec. avec l'hypoténuse PZ que l'on vient aussi de trouver de 41 deg. 9 m. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le segment MP.

(a) N. 184.

Complément du logar. du sinus du complément de
l'angle MPZ trouvé de 69 deg. 15 min. 52 sec. 0.4509290
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PZ trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec. 10.0587290

Logarithme de la tangente du compl. du segment MP 10.5092589

qui (b) donne 72 deg. 47 min. 59 sec. p. m. pour la valeur de (b) N. 103, ce complément; & par conséquent, 17 deg. 12 min. 1 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté aP, que l'on a trouvé de 67 deg. 44 min. 11 sec. laisse 50 deg. 32 m. 10 sec. pour la valeur du segment aM.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle aZP, on connoît le segment MP que l'on vient de trouver de 17 deg. 12 min. 1 sec. le segment aM que l'on vient aussi de trouver de 50 deg. 32 min. 10 sec. avec le côté PZ que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), le côté (c) N. 103, Za.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MP trouvé de 17 deg. 12 min. 1 sec. - - - - - 0.0198708

Logarithme du sinus du complément du segment aM trouvé de 50 deg. 32 min. 10 sec. - - - - - 9.8031782

Logarithme du sinus du complément du côté PZ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - - - 9.8766969

Logarithme du sinus du complément du côté Za - 19.6997459

qui (d) donne 30 deg. 3 min. 33 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, pour celle de la hauteur dée aC, puisque cette hauteur est ce complément même.

N n n ij

433. C'est par ce qui est enseigné dans cet Usage, que l'on a construit de la manière suivante, la Table des Réfractions qui est à la fin de ce Traité.

- On a choisi l'une des Etoiles fixes qui passent le plus près du Zénith ; parce que les réfractions étant d'autant plus petites que l'objet dont on observe la hauteur est plus élevé sur l'horison, on a pu prendre la hauteur méridienne apparente de l'Etoile que l'on avoit choisie, pour sa vraie hauteur méridienne, & en déduire sa
- (*) N. 333. déclinaison (a), sans craindre que la différence qui s'est trouvée entre ces deux hauteurs, ait causé dans cette déclinaison aucune erreur sensible. On a aussi cherché (b) l'ascension droite de cette Etoile ; & après avoir réglé une Pendule à secondes sur le vrai mouvement du Soleil, on a observé l'instant auquel cette Etoile a paru être à l'horison, celui auquel elle a paru être élevée d'un degré sur cet horison, celui auquel elle a paru y être élevée de deux degrés ; & ainsi de suite, jusqu'à l'instant auquel elle a paru y être élevée de 90 degrés. On a ensuite cherché de la même manière dont nous venons de le faire dans cet Usage, quelle devoit être la vraie hauteur de cette Etoile à chacun de ces instans. Enfin, on a retranché ces vraies hauteurs de ces hauteurs apparentes, chacune de chacune ; & les différences ont formé la Table que l'on trouve à la fin de ce Traité.

434. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horizon d'un certain lieu, avec l'ascension droite & la déclinaison d'une Etoile, trouver l'Azimuth de cette Etoile à un certain instant; c'est-à-dire, l'angle que le Vertical de cette Etoile forme à ce certain instant avec le Méridien de ce lieu.

On donne l'ascension droite γ QSED * de * Fig. 190. la Tête d'Hercule marquée a dans Bayer, de 255 deg. 48 min. 36 sec. avec la déclinaison D^a de cette Etoile de 14 deg. 41 min. vers le septentrion; & il faut trouver l'angle CZH que le vertical ZC de cette même Etoile formoit avec le Méridien HZO de Paris, le 14. du mois de Mai de l'année 1749, à 10 heures du soir.

Solution. Après avoir trouvé de la même manière dont on l'a fait dans l'Usage précédent (a), que le 14. du mois de Mai de l'an. (a) N. 432. née 1749, l'ascension droite γ QS du Soleil étoit à 10 heures du soir, de 51 deg. 42 min. 55 sec. on ajoute cette ascension à l'arc SE qui est de 150 deg. puisque l'heure donnée est 10 heures du soir; & l'on a 201 deg. 42 min. 55 sec. pour le point E de l'Equateur qui étoit au Méridien à l'instant proposé. Mais, puisque l'arc γ QSE est de 201 deg. 42 min. 55 sec. & que l'arc γ QSED qui est l'ascension droite de l'Etoile proposée, est donné de 255 deg. 48 min. 36 sec. l'arc ED, & par conséquent l'angle *PZ dont (b) cet arc est la mesure, sont (b) N. 196. chacun de 54 deg. 5 min. 41 sec.

Ainsi, dans le triangle-Sphérique obliquangle $\triangle PZ$, on connoît l'angle $\angle PZ$ de 54 d. 5 m. 41 sec. puisque l'on vient de trouver cet angle de cette grandeur : le côté $\angle P$ de 75 deg. 19 min. puisque ce côté est le complément de la déclinaison D qui est donnée de 14 deg. 41 min. avec le côté PZ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P sur l'horison de Paris, qui est de 48 deg. 50 min. 10 sec. Par conséquent, après

- (a) N. 197. avoir supposé (a) un arc $\angle M$ d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle \angle perpendiculairement au côté PZ , (prolongé vers M , parce que les angles $\angle PZ$ & $\angle ZP$ sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante l'angle demandé $\angle ZM$, ou CZH .

^{1^{ent}} dans le triangle-Sphérique $\triangle PM$ qui [c] est rectangle en M , on connoît l'angle $\angle PM$, ou $\angle PZ$, que l'on vient de trouver de 54 deg. 5 min. 41 sec. avec l'hypoténuse $\angle P$ que l'on vient aussi de trouver de 75 deg. 19 min. Ainsi,

- (b) N. 184. l'on cherche de la manière suivante (b), le segment MZP .

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle $\angle PM$ trouvé de 54 deg. 5 min. 41 sec. 0.2317713

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse $\angle P$ trouvée de 75 deg. 19 min. - - - 9.4183580

Logarithme de la tangente du complément du segment MZP - - - - - 9.6501293

- (c) N. 103. qui (c) donne 24 deg. 4 min. 33 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 65 deg. 55 min. 27 sec. pour celle de ce segment ; de laquelle ayant retranché le côté PZ , que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. il reste 24 deg. 45 min. 37 sec. pour la valeur du segment MZ .

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZaP , on connoît le segment MZ que l'on vient de trouver de 24 deg. 45 min. 37 sec. le segment MZP que l'on vient aussi de trouver de 65 deg. 55 min. 27 sec. avec l'angle aPZ que l'on a trouvé de 54 deg. 5 min. 41 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), (a) N. 317. l'angle demandé aZM , ou CZH .

Complément du logarithme du sinus du segment MZ	
trouvé de 24 deg. 45 min. 37 sec. - - - -	0.3779699
Logarithme du sinus du segment MZP trouvé de	
65 deg. 55 min. 27 sec. - - - -	9.9604738
Logarithme de la tangente de l'angle aPZ trouvé	
de 54 deg. 5 min. 41 sec. - - - -	10.1402496
Logarithme de la tangente de l'angle demandé aZM ,	
ou CZH - - - - -	10.4786933

qui (b) donne 71 deg. 37 min. 38 sec. pour la valeur de cet angle. (b) N. 103.

SCHOLIE.

435. Si au lieu de donner, comme on le fait dans cet Usage, l'ascension droite $\gamma QSED$ * * Fig. 190. d'une Etoile, avec le jour & l'heure, on donnoit seulement la hauteur OP du Pôle P sur l'horison HO , avec la hauteur Ca de cette Etoile sur le même horison, & sa déclinaison Da ; on connoitroit tous les côtés du triangle-Sphérique aPZ , puisque ces côtés seroient les compléments des choses données. Ainsi, l'on trouveroit l'angle aZP de la manière dont nous avons dit (c) qu'il falloit (c) N. 293. s'y prendre pour trouver les angles d'un triangle-Sphérique dont tous les côtés étoient connus; &

472 TRAITE' COMPLET

lorsque l'on auroit trouvé cet angle αZP , on connoitroit aussi l'angle demandé CZH , puisque cet angle demandé est le supplément de cet angle αZP .

XXVIII. USAGE.

436. Connoissant les longitudes de deux Etoiles avec leurs latitudes, trouver la distance de ces deux Etoiles.

• Fig. 191. On donne la longitude γC * de l'Etoile A de 20 deg. 12 min. avec sa latitude CA de 34 deg. 20 min. vers le septentrion. On donne pareillement la longitude γD de l'Etoile B, de 125 deg. 44 min. avec sa latitude DB de 5 deg. 36 min. aussi vers le septentrion; & il faut trouver la distance AB de ces deux Etoiles.

Solution. Dans le triangle-Sphérique oblique AIB, on connoît le côté AI de 55 deg. 40 min. puisque ce côté est le complément de la latitude CA de l'Etoile A, qui est donnée de 34 deg. 20 min. le côté BI de 84 deg. 24 min. puisque ce côté est le complément de la latitude DB de l'Etoile B, qui est donnée de 5 deg. 36 min. avec l'angle AIB, ou CID, de (a) N. 196. 105 deg. 32 min. puisque l'arc CD, qui (a) est la mesure de cet angle, est la différence de la longitude γC de l'Etoile A, qui est donnée de 20 deg. 12 min. à la longitude γD de l'Etoile B, qui est aussi donnée de 125 deg. 44 min. (b) N. 197. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc AFM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle A perpendiculairement

DE TRIGONOMÉTRIE. 473

perpendiculairement au côté BI, (prolongé vers M, parce que les angles ABI & AIB sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante le côté AB qui est la distance demandée.

1^{er}, dans le triangle - Sphérique MFAI qui [c] est rectangle en M, on connoît l'hypoténuse AI de 55 deg. 40 min. puisque l'on vient de la trouver de cette grandeur : avec l'angle AIM de 74 deg. 28 min. puisque cet angle est le supplément de l'angle AIB que l'on vient aussi de trouver de 105 deg. 32 min. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), (a) N. 184: le segment IM:

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle AIM trouvé de 74 deg. 28 min. -	0.5721911
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse AI trouvée de 55 deg. 40 min. - -	9.8344249

Logarithme de la tangente du complément du segment IM - - - - -	10.4066160
---	------------

qui (b) donne 68 deg. 35 min. 26 sec. p. m. pour la valeur (b) N. 103: de ce complément ; & par conséquent, 21 deg. 24 min. 34 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant ajoutée au côté BI, que l'on a trouvé de 84 deg. 24 min. donne 105 deg. 48 min. 34 sec. pour la valeur du segment BIM.

2^{er}, dans le triangle-Sphérique obliquangle BAI, on connoît le segment IM que l'on vient de trouver de 21 deg. 24 min. 34 sec. le segment BIM que l'on vient aussi de trouver de 105 deg. 48 min. 34 sec. avec le côté AI que l'on a trouvé de 55 deg. 40 min. Ainsi,

474 TRAITE' COMPLET

(a) N. 303. l'on cherche de la manière suivante (a), le côté AB qui est la distance demandée.

Complément du logarithme du sinus du complément
du segment IM trouvé de 21 deg. 24 min. 34 sec. 0.0370514
Logarithme du sinus du complément du segment BIM
trouvé de 105 deg. 48 min. 34 sec. - - - 9.4352689
Logarithme du sinus du complément du côté AI
trouvé de 55 deg. 40 min. - - - - - 9.7512841

Logarithme du sinus du complément de la distance
demandée AB - - - - - 89.2176055

(b) N. 103. qui (b) donne 9 deg. 30 min. p. m. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 99 deg. 30 min. pour celle de cette distance, qui (c) vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle ; puisqu'elle est l'hypoténuse d'un triangle-Sphérique rectangle ABM, dont l'un des côtés BIM vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & l'autre AM vaut moins que ce quart.

AUTRE EXEMPLE.

437. On donne pour les longitudes & pour les latitudes des Etoiles A * & b les mêmes nombres que l'on a donnés pour celles des Etoiles de l'exemple précédent, excepté que la latitude Db de l'Etoile b est méridionale ; & il faut trouver la distance Ab de ces deux Etoiles.

Solution. 1^{er}, dans le triangle-Sphérique obliquangle Aib, on connoît le côté AI de 55 deg. 40 min. le côté bi de 95 d. 36 m. avec l'angle Aib de 105 deg. 32 min. Ainsi, après avoir supposé un arc AFM d'un grand cercle, perpendiculaire au côté bi, & trouvé le segment IM de 21 d. 24 m. 34 sec. de même & de la même manière que dans l'exemple précédent, on ajoute ce segment au côté bi, & l'on a

117 deg. 0 min. 34 sec. pour la valeur du segment *bIM*.

2^{ent}, dans le triangle - Sphérique obliquangle *bAI*, on connoît le segment *IM* que l'on a trouvé de 21 d. 24 m. 34 sec. le segment *bIM* que l'on vient de trouver de 117 deg. 0 min. 34 sec. avec le côté *AI* que l'on a aussi trouvé de 55 deg. 40 min. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté *Ab* qui est la (a) N. 303. distance demandée,

Complément du sinus du complément du segment *IM* trouvé de 21 deg. 24 min. 34 sec. 0.0310524

Logarithme du sinus du complément du segment *bIM* trouvé de 117 deg. 0 min. 34 sec. - - - 9.6571872

Logarithme du sinus du complément du côté *AI* trouvé de 55 deg. 40 min. - - - 9.7511842

Logarithme du sinus du compléments de la distance demandée *Ab* - - - 19.4395238

qui (b) donne 15 deg. 58 min. 9 sec. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 105 deg. 58 min. 9 sec. pour celle de cette distance, qui vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, par des raisons pareilles à celles que nous avons dites à la fin de l'exemple précédent.

SCHOLIE.

438. C'est par une méthode entièrement pareille à celle que nous venons de suivre dans cet Usage, que l'on trouve la distance de deux Villes dont on connoît les latitudes & les longitudes.

Ainsi, si l'on sçait, par exemple, que la longitude *EC* * de Paris est de 20 deg. & sa latitude *CP* de 48 deg. 50 min. 10 sec. vers le septentrion; & que la longitude *ED* de Goa est

de 91 deg. 25 min. & sa latitude DG de 15 deg. 31 min. aussi vers le septentrion; on trouve de la maniere suivante, la distance PG de ces deux Villes.

- (a) N. 297. I^{ent} Après avoir suppose (a) un arc PM d'un grand cercle de la Terre, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté GN, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles PNG & PGN sont de même espece,) on a un triangle sphérique MPN qui [c] est rectangle en M, & dans lequel on connoît l'hypoténuse PN de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque cette hypoténuse est le complément de la latitude CP de Paris, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'angle PNM, ou CND, de 71 deg. 25 min.
- (b) N. 196. puisque cet angle a pour mesure (b) la différence CD de la longitude EC de Paris, qui est donnée de 20 deg. à la longitude ED de Goa, qui est aussi donnée de 91 deg. 25 min. Ainsi, l'on cherche
- (c) N. 284. de la maniere suivante (c), le segment MN.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle PNM trouvé de 71 deg. 25 m. 0.4966403

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PN trouvée de 41 deg. 9 m. 50 s. 10.0583299

Logarithme de la tangente du complément du segment MN 10.5549693

- (d) N. 103. qui (d) donne 74 deg. 25 min. 50 sec. p. m. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 15 deg. 34 min. 10 sec. pour celle de ce segment; laquelle étant retranchée du côté GN, qui est de 74 deg. 29 min. puisqu'il est le complément de la latitude DG de Goa, qui est donnée de 15 deg. 31 min. laisse 58 deg. 54 min. 50 sec. pour la valeur du segment GM.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle GPN, on connoît le segment MN que l'on vient de trouver de 15 deg. 34 min. 10. sec, le segment GM que l'on vient aussi de trouver de 58 deg. 54 min. 50 sec. avec le côté PN que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté PG qui est la (a) N. 302. distance demandée.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MN trouvé de 15 deg. 34 min. 10 sec.	0.0162358
Logarithme du sinus du complément du segment GM trouvé de 58 deg. 54 min. 50 sec.	9.7129238
Logarithme du sinus du complément du côté PN trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	9.8766969
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée PG	19.6058565

qui (b) donne 23 deg. 47 min. 52 sec. $\frac{1}{2}$ pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 66 deg. 12 min. 7 sec. $\frac{1}{2}$, ou 1655 lieues p. p. de 15 au degré, pour la valeur de cette distance.

439. Et si l'on proposoit de trouver la distance PL* de Paris à Lima Capitale du Pérou, *Fig. 193. dont la longitude AQED est de 300 deg. 50 min. 30 sec. & la latitude DL de 12 deg. 1 min. 15 sec. vers le midi ; on supposeroit (c) (c) N. 297. de même que dans l'exemple précédent, un arc PM d'un grand cercle de la Terre, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté LDN, (qu'il rencontreroit aussi en un point M, parce que les angles PNL & PLN seroient encore de même espèce,) & l'on trouveroit ensuite de la manière suivante, la distance demandée PL.

478 TRAITE' COMPLET

1^{ent} Dans le triangle-Sphérique MPN qui [c] seroit rectangle en M, on connoitroit l'hypoténuse PN de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque cette hypoténuse seroit le complément de la latitude CP de Paris, qui est de 48 deg. 50 min. 10 sec. avec l'angle MNP, ou DNC, de 79 deg. 9 min. (a) N. 196, 30 sec. puisque (a) cet angle auroit pour mesure la somme DAC de la longitude AC de Paris, qui est de 20 deg. & de la différence DA de la longitude AQED de Lima, qui est de 300 deg. 50 min. 30 sec. à la circonférence entière de l'Equateur EQ. Ainsi, l'on trouveroit de la manière suivante (b), le segment MN.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle MNP trouvé de 79 deg. 9 min. 30 sec.	0.725611
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse PN trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec.	10.0583290
Logarithme de la tangente du complément du segment MN	19.7839505

(c) N. 103, qui (c) donneroit 80 deg. 39 min. 39 sec. p. p. pour la valeur du complément ; & par conséquent, 9 deg. 20 min. 21 sec. pour celle de ce segment ; laquelle étant retranchée du côté EDN, que l'on trouveroit de 102 deg. 1 min. 15 sec. puisque ce côté seroit la somme du quart de cercle DN & de la latitude DL de Lima, laquelle est de 12 deg. 1 min. 15 sec. laisseroit 92 deg. 40 min. 54 sec. pour la valeur du segment LDM.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle LPN, on connoitroit le segment MN que l'on viendroit de trouver de 9 deg. 20 min. 21 sec. le segment LDM que l'on viendroit aussi de trouver de 92 deg. 40 min 54 sec. avec le côté PN que l'on auroit trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangla GPN, on connoît le segment MN que l'on vient de trouver de 15 deg. 34 min. 10. sec, le segment GM que l'on vient aussi de trouver de 58 deg. 54 min. 50 sec. avec le côté PN que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), le côté PG qui est la (a) N. 302. distance demandée.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MN trouvé de 15 deg. 34 min. 10 sec. - - - - -	0.0162358
Logarithme du sinus du complément du segment GM trouvé de 58 deg. 54 min. 50 sec. - - - - -	9.7129238
Logarithme du sinus du complément du côté PN trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - - -	9.8766969
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée PG - - - - -	19.6058565

qui (b) donne 23 deg. 47 min. 52 sec. $\frac{1}{2}$ pour la valeur de ce complément ; & par conséquent , 66 deg. 12 min. 7 sec. $\frac{1}{2}$, ou 1655 lieues p. p. de 25 au degré, pour la valeur de cette distance.

439. Et si l'on proposoit de trouver la distance PL* de Paris à Lima Capitale du Pérou, *Fig. 193. dont la longitude AQED est de 300 deg. 50 min. 30 sec. & la latitude DL de 12 deg. 1 min. 15 sec. vers le midi; on supposeroit (c) (c) N. 297. de même que dans l'exemple précédent, un arc PM d'un grand cercle de la Terre, tiré du sommet de l'angle P perpendiculairement au côté LDN, (qu'il rencontreroit aussi en un point M, parce que les angles PNL & PLN seroient encore de même espece,) & l'on trouveroit ensuite de la manière suivante, la distance demandée PL.

480

TRAITE COMPLET

30 sec. & il faut trouver 1^{ent} , le point B de ce cercle qui se leve en même temps que cette Etoile; 2^{ent} , l'angle FB δ que ce même cercle forme à cet instant avec cet horizon HO.

- Solution.* 1^{ent} , dans le triangle-Sphérique $\triangle DF$ qui est rectangle en D, on connoît l'angle $DF\alpha$, ou EFH, de 41 deg. 9 min. 50 sec. puis-
- (a) N. 196: que (a) cet angle a pour mesure le complément HE de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec; avec le côté D α qui est donné de 16 deg. 23 min. 10 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (b), le côté DF qui est la différence ascensionnelle de l'Etoile proposée.
- (b) N. 277:

Complément du logarithme de la tangente de l'angle

DF α trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - 0.0583296

Logarithme de la tangente du côté D α donné de

16 deg. 23 min. 10 sec. - - - 9.4684259

Logar. du sinus de la différence ascensionnelle DF 9.5267540

- (c) N. 103. qui (c) donne 19 deg. 39 min. 10 sec. pour la valeur de cette différence; laquelle étant ajoutée à l'ascension droite $\angle E$ D, qui est donnée de 98 deg. 31 min. 27 sec. donne 118 deg. 10 min. 37 sec. pour l'ascension oblique $\angle E$ DF; & par conséquent, 61 deg. 49 min. 23 sec. pour le côté F α du triangle-Sphérique obliquangle F α B.

- (d) N. 297. 2^{ent} , après avoir supposé (d) dans le triangle-Sphérique obliquangle F α B, un arc α M d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle α perpendiculairement au côté FB, (prolongé vers M, parce que les angles α BF & α FB sont de différente espèce,) on connoît dans le triangle-Sphérique F α M qui [c] est rectangle en M, l'hypoténuse

Ainsi, l'on trouveroit de la manière suivante (a), (a) N. 303, le côté PL qui seroit la distance demandée.

Complément du logarithme du sinus du complément du segment MN trouvé de 9 deg. 20 min. 21 sec. - - - - -	0.0057951
Logarithme du sinus du complément du segment LDM trouvé de 92 deg. 40 min. 54 sec. - - -	8.6701228
Logarithme du sinus du complément du côté PN trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - -	9.8766969
Logarithme du sinus du complément de la distance demandée PL - - - - -	8.5516148

qui (b) donneroit 2 deg. 2 min. 44 sec. p. p. pour la valeur de (b) N. 103; ce complément; & par conséquent, 92 deg. 2 min. 44 sec. †, ou 2301 lieues p. p. de 25 au degré, pour la valeur de cette distance.

XXIX. USAGE.

440. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horizon d'un certain lieu, avec l'ascension droite d'une Etoile, sa déclinaison, & l'obliquité de l'Ecliptique; trouver le point de ce cercle qui se leve en même temps que cette Etoile, & l'angle que ce même cercle forme à cet instant avec cet horizon.

On donne la hauteur OP * du Pôle P sur * Fig. 194. l'horizon HO, de 48 deg. 50 min. 10 sec. l'ascension droite VED de Sirius, de 98 deg. 31 min. 27 sec. sa déclinaison D_a de 16 deg. 23 min. 10 sec. vers le midi: avec l'obliquité F_aB de l'Ecliptique, de 23 deg. 28 min.

† Cette distance est de plus du quart de la circonférence d'un cercle (c); puisqu'elle est l'hypoténuse d'un triangle-Sphérique (c) N. 236; rectangle LPM, dont le côté LM vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle, & le côté PM vaut moins que ce quart,

480 TRAITE COMPLET

30 sec. & il faut trouver 1^{ent} , le point B de ce cercle qui se leve en même temps que cet Etoile; 2^{ent} , l'angle FB \angle que ce même cercle forme à cet instant avec cet horizon HO.

- Solution.* 1^{ent} , dans le triangle-Sphérique DF qui est rectangle en D, on connoît l'angle DF α , ou EFH, de 41 deg: 9 min: 50 sec. pour
 (a) N. 196: que (a) cet angle a pour mesure le complément HE de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg: 50 min: 10 sec; avec le côté D α qui est donné de 16 deg. 23 min: 10 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante
 (b) N. 277: vante (b), le côté DF qui est la différence ascensionnelle de l'Etoile proposée.

Complément du logarithme de la tangente de l'angle

DF α trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - 0.0583296

Logarithme de la tangente du côté D α donné de

16 deg. 23 min. 10 sec. - - - 9.4684159

Logar. du sinus de la différence ascensionnelle DF 9.5267540

- (c) N. 103. qui (c) donne 19 deg. 39 min. 10 sec. pour la valeur de cette différence; laquelle étant ajoutée à l'ascension droite \vee ED, qui est donnée de 98 deg. 31 min. 27 sec. donne 118 deg. 10 min. 37 sec. pour l'ascension oblique \vee EDF; & par conséquent, 61 deg. 49 min. 23 sec. pour le côté F α du triangle-Sphérique obliquangle F α B.

- (d) N. 297. 2^{ent} , après avoir supposé (d) dans le triangle-Sphérique obliquangle F α B, un arc α M d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle α perpendiculairement au côté FB, (prolongé vers M, parce que les angles α BF & α FB sont de différente espèce,) on connoît dans le triangle-Sphérique F α M qui [c] est rectangle en M, l'hypoténuse

- Phypoténuse $F\hat{A}$ que l'on vient de trouver de 61 deg. 49 min. 23 sec. avec l'angle $\hat{A}FM$ qui (a) est égal à l'angle EFH que l'on a trouvé de 41 degré 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (b), l'angle $\hat{A}N. 199$ $F\hat{A}M$. $\hat{A}N. 183$

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse $F\hat{A}$ trouvée de 61 deg. 49 min.

23 sec. - - - - - 0.3258776

Logar. de la tangente du complément de l'angle

$\hat{A}FM$ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - 10.0583290

Logar. de la tangente de l'angle $F\hat{A}M$ - - - 10.3842066

qui (c) donne 67 deg. 34 min. pour la valeur de cet angle ; (c) $\hat{A}N. 103$ de laquelle ayant retranché l'angle $F\hat{A}B$, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 44 deg. 5 min. 30 sec. pour la valeur de l'angle $B\hat{A}M$.

3^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle $F\hat{A}B$, on connoît l'angle au sommet $F\hat{A}M$ que l'on vient de trouver de 67 deg. 34 min. l'autre angle au sommet $B\hat{A}M$ que l'on vient aussi de trouver de 44 degré 5 min. 30 sec. avec le côté $F\hat{A}$ que l'on a trouvé de 61 deg. 49 min. 23 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (d), l'autre côté $B\hat{A}$. $\hat{A}N. 305$

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle $F\hat{A}M$ trouvé de 67 deg. 34 min. -

0.4183823

Logar. du sinus du complément de l'angle $B\hat{A}M$ trouvé de 44 deg. 5 min. 30 sec. - - -

9.8562620

Logar. de la tangente du complément du côté $F\hat{A}$ trouvé de 61 deg. 49 min. 23 sec. - - -

9.7289032

Logar. de la tang. du complément du côté $B\hat{A}$ - 20.0035475

qui (e) donne 45 deg. 14 min. 2 sec. p. p. pour la valeur de (e) $\hat{A}N. 103$. ce complément ; & par conséquent, 44 deg. 45 min. 58 sec. pour

celle de ce côté ; laquelle étant retranchée de la moitié $\sqrt{64}$ de la circonférence de l'Ecliptique , laisse 135 deg. 14 min 2 sec. ou le 15^{me} deg. 14 min. 2 sec. du \odot , pour le point B de ce cercle , qui se leve en même temps que l'Etoile proposée.

4^{ent} enfin , dans le triangle-Sphérique oblique $F\triangle B$, on connoît le côté $B\triangle$ que l'on vient de trouver de 44 deg. 45 min. 58 sec. le côté $F\triangle$ que l'on a trouvé de 61 degrés 49 min. 23 sec. avec l'angle $\triangle FB$, ou $\triangle FM$, que l'on a aussi trouvé de 41 deg. 9 minutes 50 sec. Ainsi , l'on cherche de la manière suivante (a) , l'angle $\triangle BF$.

Complément du logarithme du sinus du côté $B\triangle$			
trouvé de 44 deg. 45 min. 58 sec.	-	-	0.1522952
Logar. du sinus du côté $F\triangle$ trouvé de 61 deg.			
49 min. 23 sec.	-	-	9.9452191
Logarithme du sinus de l'angle $\triangle FB$ trouvé de			
41 deg. 9 min. 50 sec.	-	-	9.8183678
			<hr/>
Logar. du sinus de l'angle $\triangle BF$	-	-	29.9158821

(b) N. 103. qui (b) donne 124 deg. 31 min. 17 sec. pour la valeur de cet angle , qui est obtus ; & par conséquent , 55 deg. 28 min. 43 sec. pour celle de l'angle $F\triangle B$ que l'Ecliptique forme avec l'horizon.

SCHOLIE I.

441. Si en supposant les mêmes choses que l'on vient de donner dans cet usage , (exceptés l'ascension droite que l'on change en descension droite ,) on propose de trouver le point B* de l'Ecliptique qui se couche en même temps que l'Etoile proposée a , & l'angle $F\triangle B$ que ce cercle forme à cet instant avec l'horizon HO ; alors ,

après avoir trouvé la différence descensionnelle DF, de 19 deg. 39 min. 10 sec. de la même manière dont on a trouvé dans cet Usage la différence ascensionnelle DF (fig. 194.), on retranche cette différence descensionnelle de la descension droite \angle FD qui est donnée de 98 deg. 31 min. 27 sec. & le reste 78 deg. 52 min. 17 sec. est la valeur de la descension oblique de l'Etoile proposée, c'est-à-dire, la valeur du côté F γ du triangle-Sphérique obliquangle F γ B.

Or, si l'on suppose (a) un arc γ M d'un grand (a) N. 297. cercle, tiré du sommet de l'angle γ perpendiculairement au côté FB, (prolongé vers M, parce que les angles γ BF & γ FB sont de différente espèce,) on connoît dans le triangle-Sphérique F γ M qui [C] est rectangle en M, l'hypoténuse F γ que l'on vient de trouver de 78 deg. 52 min. 17 sec. avec l'angle γ FM qui (b) est égal à (b) N. 199. l'angle HFE ; c'est-à-dire, au complément 41 deg. 9 min. 50 sec. de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c) (c) N. 283. l'angle F γ M.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse F γ trouvée de 78 deg. 52 min. 17 sec. - - - 0.7144159

Logarithme de la tangente du complément de l'angle γ FM trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. 10.0583290

Logar. de la tangente de l'angle F γ M - - - 10.7727449

qui (d) donne 80 deg. 25 min. 17 sec. pour la valeur de cet (d) N. 103.

484 TRAITE' COMPLET

angle ; de laquelle ayant retranché l'angle $F\gamma B$, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 56 deg. 56 min. 47 sec. pour la valeur de l'angle $B\gamma M$.

Ainsi, dans le triangle-Sphérique obliquangle $F\gamma B$, on connoît l'angle au sommet $F\gamma M$, que l'on vient de trouver de 80 deg. 25 m. 17 s. l'autre angle au sommet $B\gamma M$ que l'on vient aussi de trouver de 56 deg. 56 min. 47 sec. avec le côté $F\gamma$ que l'on a trouvé de 78 deg. 52 min. 17 sec. Par conséquent, on cherche
(a) N. 305. de la manière suivante (a), l'autre côté $B\gamma$.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle $F\gamma M$ trouvé de 80 deg. 25 m. 17 sec.	0.7788455
Logarithme du sinus du complément de l'angle $B\gamma M$ trouvé de 56 deg. 56 min. 47 sec.	9.7367338
Logarithme de la tangente du complément du côté $F\gamma$ trouvé de 78 deg. 52 min. 17 sec.	9.2938281
Logar. de la tangente du compl. du côté $B\gamma$	29.8094070

(b) N. 103. qui (b) donne 32 deg. 48 min. 46 sec. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 57 deg. 11 min. 14 sec. ou le 27^{me} deg. 11 min. 14 sec. du 8, pour le point B de l'Ecliptique qui se couche en même temps que l'Etoile proposée.

Enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle $F\gamma B$, on connoît le côté $B\gamma$ que l'on vient de trouver de 57 deg. 11 min. 14 sec. le côté $F\gamma$ que l'on a trouvé de 78 deg. 52 min. 17 sec. avec l'angle γFB , ou γFM , que l'on a aussi trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi,
(c) N. 189. l'on cherche de la manière suivante (c), l'angle $FB\gamma$.

Complément du logarithme du sinus du côté B γ			
trouvé de 57 deg. 11 min. 14 sec.	- - -	0.0754903	
Logarithme du sinus du côté F γ trouvé de			
78 deg. 52 min. 17 sec	- - -	9.9917559	
Logarithme du sinus de l'angle γ FB trouvé de			
41 deg. 9 min. 30 sec.	- - -	9.8183678	
<hr/>			
Logarithme du sinus de l'angle FB γ	- - -	19.8856140	
qui (a) donne 129 deg. 47 min. 8 sec. pour la valeur de cet angle, (a) N. 103.			
qui est obtus; & par conséquent, 50 deg. 12 min. 52 sec. pour			
celle de l'angle FB δ que l'Ecliptique forme avec l'horison.			

SCHOLIE II.

442. Si l'on cherche dans quelques Ephémérides, ou par les Tables de M. de Cassini, le jour auquel le Soleil sera au 15^{me} degré du Ω , on trouvera que ce jour sera le 8^{me} du mois d'Août, de l'année 1749. Ainsi, le 8 du mois d'Août de cette année, Sirius se lèvera + environ en même temps que le Soleil. Et comme on trouvera dans les mêmes Ephémérides, ou par les mêmes Tables, que le Soleil sera au degré opposé, qui est le 15^{me} du ω , le 4. du mois de Février de l'année suivante, le 4. du mois de Février de l'année 1750. Sirius se lèvera environ au même instant auquel le Soleil se couchera.

† Lorsqu'un Astre se leve en même temps que le Soleil, le lever de cet Astre se nomme *lever Cosmique*, ou *du matin*. Mais, lorsqu'un Astre se leve à l'instant auquel le Soleil se couche, le lever de cet Astre se nomme alors *Lever Acrónique*, ou *du soir*. Pareillement, lorsqu'un Astre se couche à l'instant auquel le Soleil se leve, le coucher de cet Astre se nomme *Coucher Cosmique*; & lorsqu'un Astre se couche en même temps que le Soleil, alors le coucher de ce même Astre se nomme *Coucher Acrónique*.

Si l'on cherche pareillement le jour auquel le Soleil sera au 27^{me} degré du 8, on trouvera que ce jour sera le 18^{me} du mois de Mai de l'année 1749. Ainsi, le 18. du mois de Mai de cette année, Sirius se couchera environ en même temps que le Soleil. Mais, comme le Soleil sera au degré opposé, qui est le 27^{me} du 11, le 19. du mois de Novembre de la même année, le 19. de Novembre de cette même année, Sirius se couchera environ au même instant auquel le Soleil se lèvera.

XXX. USAGE.

443. *Connoissant le point de l'Ecliptique avec lequel une Etoile se leve, & l'angle que ce cercle forme à cet instant avec l'horison, trouver le point de ce même cercle auquel le Soleil doit être, afin que cette Etoile se lève Héliquement.*

† On dit d'un Astre qu'il se leve Héliquement, lorsqu'après avoir été pendant quelque temps immergé dans les rayons du Soleil, il commence à pouvoir être apperçu à l'horison Oriental, un peu avant le lever du Soleil; & au contraire, qu'il se couche Héliquement, lorsqu'étant prêt à s'enfoncer dans les rayons du Soleil, on l'entrevoit cependant encore à l'horison Occidental, un peu après le coucher du Soleil. Mais il faut remarquer que tous les Astres ne demandent pas une même distance du Soleil pour pouvoir être vus. Suivant Kepler §, on commence à distinguer les Etoiles de la première grandeur, lorsqu'elles sont éloignées du Soleil de 12 degrés; & celles de la dernière, lorsqu'elles en sont éloignées de 18. Saturne n'exige que 11 deg. de distance; Jupiter 10; Mars 11 $\frac{1}{2}$; Venus 5. & M. De la Hire assure même avoir vu cette dernière Planète, dans des temps auxquels elle n'étoit pas éloignée du Soleil de plus d'un degré.

§ Copernic. Epist. Lib. 3. fol. 364.

Le point B* de l'Ecliptique qui se lève en* Fig. 196. même temps que *Sirius*, est le 15^{me} deg. 14 min. 2 sec. du Ω (a); l'angle FB ϕ que ce cer-(a) N. 449. cle forme avec l'horison HO, est de 55 deg. 28 m. 43 sec. & il faut trouver le point C de ce même cercle auquel le Soleil doit être, afin que cette Etoile se lève héliquement.

Solution. Après avoir supposé qu'un cercle vertical ZGC vient rencontrer l'Ecliptique à 12 degrés au dessous de l'horison HO, (qui est la profondeur que le Soleil doit avoir, afin que l'Etoile proposée qui est de la première grandeur, puisse être apperçue,) on a un triangle-Sphérique BCG qui [c] est rectangle en G; & dans lequel on connoît le côté GC de 12 d. puisque ce côté est la mesure de cette profondeur supposée; avec l'angle CBG de 55 deg. 28 min. 43 sec. puisque (b) cet angle-(b) N. 199, est égal à l'angle FB ϕ qui est donné de cette grandeur. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'hypoténuse BC. (c) N. 264.

Complément du logar. du sinus de l'angle CBG trouvé de 55 deg. 28 min. 43 sec. - - - - 0.0841178

Logar. du sinus du côté GC supposé de 12 deg. 9.3178789

Logar. du sinus de l'hypoténuse BC - - - - 9.4019967

qui (d) donne 14 deg. 36 min. 59 sec. pour la valeur de cette (d) N. 103, hypoténuse; laquelle étant ajoutée au 15^{me} deg. 14 min. 2 sec. du Ω , donne le 29^{me} deg. 51 min. 1 sec. du même signe, pour le point demandé.

SCHOLIE I.

444. Si au lieu de demander le point de l'Ecliptique auquel le Soleil doit être afin que

488 TRAITE' COMPLET

Sirius se lève héliquement, on propose au contraire de trouver celui auquel ce même Astre doit être afin que cette même Etoile se couche héliquement; il faut alors connoître le point B^a de l'Ecliptique qui se couche en même temps que Sirius, & l'angle FB^a que ce même cercle forme à cet instant avec l'horison HO. Ainsi, en supposant que l'on ait trouvé pour ce point le 27^{me} deg. 11 min. 14 sec. du 8; & 50 deg. 12 min. 52 sec. pour la valeur de cet angle, (de même que dans la première Scholie (a) N. 441. du 29^{me} Usage (a), & de la même manière dont on l'a fait dans cette Scholie,) on fera passer par le Zénith Z un cercle vertical ZGC qui vienne rencontrer l'Ecliptique à 2 degrés de profondeur au dessous de l'horison HO. Or par ce moyen, on aura un triangle-Sphérique BCG qui [C] sera rectangle en G; & dans lequel on connoitra le côté CG de 12 deg. puisque ce côté sera la profondeur supposée, avec l'angle (b) N. 199. CBG de 50 deg. 12 min. 52 sec. puisque (b) cet angle est égal à l'angle FB^a qui est donné de cette grandeur. Ainsi, l'on trouvera de la manière suivante (c), l'hypoténuse BC.

(c) N. 264.

Complément du logar. du sinus de l'angle CBG	
trouvé de 50 deg. 12 min. 52 sec. - - -	0.1143871
Logar. du sinus du côté CG supposé de 12 deg.	9.3178789
Logarithme du sinus de l'hypoténuse BC - -	9.4322661

(d) N. 103. qui (d) donne 15 deg. 41 min. 52 sec. p. m. pour la valeur de cette hypoténuse; laquelle étant retranchée du 27^{me} deg 11 min. 14 sec. du 8, laissera le 11^{me} deg. 29 min. 22 sec. du même signe, pour le point demandé.

SCHOLIE II.

SCHOLIE. II.

445. Si l'on cherche dans quelques Ephémérides, ou par les Tables de M. de Cassini*, le jour auquel le Soleil sera au 29^{me} degré du Ω , on trouvera que ce jour sera le vingt-deuxième du mois d'Août de l'année 1749. Ainsi, le 22 du mois d'Août de cette année, Sirius se levera héliquement. Et comme on trouvera dans les mêmes Ephémérides, ou par les mêmes Tables, que le Soleil sera au 11^{me} degré du γ , le premier jour du mois de Mai de la même année, le premier du mois de Mai de l'année 1749 Sirius se couchera héliquement.

XXXI. USAGE.

446. Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu, avec celle d'une Planete quelconque sur le même horison, la distance de cette Planete au Méridien de ce lieu, & sa Parallaxe de hauteur; trouver les Parallaxes d'ascension droite & de déclinaison de cette même Planete. †

† Suivant ce que nous avons dit à la Note du N^o 330. une Planete étant vue de la surface de la Terre, paroît toujours moins élevée qu'elle ne l'est en effet; de manière qu'à l'instant auquel on l'observe à un point du Ciel, par exemple T*, elle est à un point L, d'autant plus élevé au dessus de ce point T, que la Planete dont il s'agit est moins éloignée de la Terre. Mais, puisqu'une Planete étant vue de la surface de la Terre, paroît être à un point du Ciel T, lorsqu'elle est à un point L plus près du Méridien HZO que n'est ce point T, l'ascension droite de cette Planete, son ascension oblique, sa descension droite, sa descension oblique, sa déclinaison, sa longitude & sa latitude, qui sont en effet celles du point L,

• Fig. 198. On donne la hauteur OP^* du Pôle P sur l'horison HO , de 48 deg. 50 min. 10 sec. la vraie hauteur CL de la Lune L sur le même horison, de 50 deg. 12 min. la distance DL au méridien HZO , de 29 deg. 48 min. avec la Parallaxe de hauteur LT , de 39 min. 8 s. Et il faut trouver la Parallaxe DB de l'ascension droite γQED de cette Planete, avec la Parallaxe FL de sa déclinaison DL qui est Septentrionale.

Solution. 1^{er}, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP , on connoît le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P , qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. le côté ZL de 39 deg. 48 min. puisque ce côté est le complément de la hauteur CL de la Planete proposée, qui est donnée de 50 deg. 12 min. avec l'angle LPZ , ou DPE ,

doivent aussi paroître être celles de ce point T . Ainsi, il y a une différence de la vraie ascension droite d'une Planete à son ascension droite apparente, de sa vraie ascension oblique à son ascension oblique apparente, de sa vraie descension droite à sa descension droite apparente, de sa vraie descension oblique à sa descension oblique apparente, de sa vraie déclinaison à sa déclinaison apparente, de sa vraie longitude à sa longitude apparente, enfin, de sa vraie latitude à sa latitude apparente; & ces différences sont ce que l'on appelle les *Parallaxes* d'ascension droite, d'ascension oblique, de déclinaison &c. Or, on pourra voir par les exemples de cet Usage & du suivant, que la Parallaxe augmente les ascensions droites & les ascensions obliques, & diminue au contraire les descensions droites & les descensions obliques: qu'elle augmente les longitudes dans l'hémisphère Oriental, & les diminue au contraire dans l'hémisphère Occidental: enfin, qu'elle diminue les déclinaisons & les latitudes Septentrionales, & augmente au contraire les déclinaisons & les latitudes Méridionales.

de 29 deg. 48 min. puisque la distance DE de la même Planete, au méridien HZO, qui (a) est la mesure de cet angle, est donnée (a) N. 196. de cette grandeur. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc ZM d'un grand cercle, tiré du (b) N. 197. du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté LP, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles ZLP & ZPL sont de même espèce,) on cherche de la manière suivante (c), l'angle PZM du triangle-Sphérique (c) N. 183. que MZP qui [c] est rectangle en M.

Complément du logar. du sinus du complément de l'hypoténuse ZP trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec. 0.1233038
Logarithme de la tangente du complément de l'angle MPZ; ou LPZ, trouvé de 29 deg. 48 min. 10.2420687

Logarithme de la tangente de l'angle PZM - - 10.3653718
qui (d) donne 66 deg. 40 min. 36 sec.; pour la valeur de cet angle. (d) N. 103.

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle L郑, on connoît le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 39 deg. 48 min. avec l'angle au sommet PZM que l'on vient de trouver de 66 deg. 40 min. 36 sec.; Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (e), l'autre angle (e) N. 315. au sommet LZM.

Complément du logar. de la tangente du complément du côté ZP trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. 9.94167
Logar. de la tangente du complément du côté ZL trouvé de 39 deg. 48 min. - - - - 10.07926
Logar. du sinus du complément de l'angle PZM trouvé de 66 deg. 40 min. 36 sec.; - - - 9.5976559

Logar. du sinus du complément de l'angle LZM 29.6185940
qui (f) donne 24 deg. 33 min. 8 sec. p. m. pour la valeur de ce com- (f) N. 103.

492 TRAITE' COMPLET

plément; & par conséquent, 65 deg. 26 min. 52 sec. pour celle de cet angle; laquelle étant ajoutée à l'angle PZM, que l'on a trouvé de 66 deg. 40 min. 36. sec. p. p. donne 132 deg. 7 min. 28 sec. pour la valeur de l'angle L郑.

3^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle L郑, on connoît l'angle LPZ que l'on a trouvé de 29 deg. 48 min. l'angle L郑 que l'on vient de trouver de 132 deg. 7 min. 28 sec. avec le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 39 deg. 48 min. Ainsi, l'on cherche de (a) N. 191. la manière suivante (a), le côté LP.

Complément du logarithme du sinus de l'angle LPZ	
trouvé de 29 deg. 48 min.	0.303664
Logar. du sinus de l'angle L郑 trouvé de 132 deg.	
7 min. 28 sec.	9.870122
Logar. du sinus du côté ZL trouvé de 39 deg. 48 min.	9.8061544
Logarithme du sinus du côté LP	29.9801430

(b) N. 193. qui (b) donne 72 deg. 48 min. 20 sec. pour la valeur de ce côté; dont le complément, 17 deg. 11 min. 40 sec. est la vraie déclinaison DL de la Planete proposée.

4^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît le côté TZ de 40 deg. 27 min. 8 sec. puisque ce côté est la somme de l'arc ZL que l'on a trouvé de 39 degrés 48 min. & de la parallaxe de hauteur LT, qui est donnée de 39 min. 8 sec. le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. avec l'angle T郑, ou L郑, que l'on a aussi trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. Ainsi, après (c) N. 197. avoir supposé (c) un arc TN d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle T perpendiculaire-

ment au côté ZP, (prolongé vers N, parce que les angles TPZ & TZP sont de différente espèce,) on cherche de la manière suivante (a) (a) N. 284. le côté NZ du triangle - Sphérique NTZ, qui [c] est rectangle en N, & dont l'angle TZN est le supplément de l'angle connu TZP.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle TZN trouvé de 47 deg. 52 min. 32 sec. 0.1734438
Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse TZ trouvée de 40 deg. 27 min. 8 sec. - 10.0692345

Logar. de la tangente du complément du côté NZ - 10.2426783
 qui (b) donne 60 deg. 14 min. 4 sec. $\frac{1}{2}$ p. p. pour la valeur de (b) N. 103, ce complément; & par conséquent, 29 deg. 45 min. 55 sec. $\frac{1}{2}$ pour celle de ce côté; laquelle étant ajoutée au côté ZP, que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. donne 70 deg. 55 min. 45 sec. $\frac{1}{2}$ pour la valeur du segment NZP.

5^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît le segment NZP que l'on vient de trouver de 70 degrés 55 minutes 45 sec. $\frac{1}{2}$; le segment NZ que l'on vient aussi de trouver de 29 deg. 45 min. 55 sec. $\frac{1}{2}$; avec l'angle TZP que l'on a trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'autre angle TPZ. (c) N. 317.

Compl. du logar. du sinus du segment NZP trouvé de 70 deg. 55 min. 45 sec. $\frac{1}{2}$ - - - 0.0245151
Logar. du sinus du segment NZ trouvé de 29 deg. 45 min. 55 sec. $\frac{1}{2}$ - - - 9.6958745
Logar. de la tangente de l'angle TZP trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. - - - 10.0436660

Logar. de la tangente de l'angle TPZ - - - 19.7640556
 qui (d) donne 30 deg. 8 min. 59 sec. p. m. pour la valeur de (d) N. 103.

cer angle; de laquelle ayant retranché l'angle L^ZP, que l'on a trouvé de 29 deg. 48 min. le reste 20 min. 59 sec. est la valeur de l'angle T^PL, ou B^PD; & par conséquent, celle de la première Parallaxe demandée, puisque (a) cette Parallaxe est la mesure de cet angle.

6^{ent} enfin, dans le triangle-Sphérique oblique Z^TP, on connoît l'angle T^PZ que l'on vient de trouver de 30 deg. 8 min. 59 sec. l'angle T^ZP que l'on a trouvé de 132 deg. 7 min. 28 sec. avec le côté T^Z que l'on a aussi trouvé de 40 deg. 27 min. 8 sec. Ainsi, (b) N. 291. l'on cherche de la manière suivante (b), le côté T^P.

Complément du logarithme du sinus de l'angle T ^P Z	
trouvé de 30 deg. 8 min. 59 sec. - - - -	0.2990702
Logar. du sinus de l'angle T ^Z P trouvé de 132 deg.	
7 min. 28 sec. - - - - -	9.8702122
Logarithme du sinus du côté T ^Z trouvé de 40 deg.	
27 min. 8 sec. - - - - -	9.8121200
Logar. du sinus du côté T ^P - - - -	19.9814124

(c) N. 203. qui (c) donne 73 deg. 21 min. 22 sec. pour la valeur de ce côté; dont le complément 16 deg. 38 min. 38 sec. est la valeur de la déclinaison apparente B^T de la Planète proposée. Ainsi, si l'on retranche cette déclinaison de la vraie déclinaison D^L, que l'on a trouvée de 17 deg. 11 min. 40 min. le reste 33 min. 2 sec. est la valeur de la seconde Parallaxe demandée F^L.

AUTRE EXEMPLE.

* Fig. 199. 447. On donne la hauteur O^P* du Pôle P sur l'horison H^O, de 48 deg. 50 min. 10 sec. la vraie hauteur C^L de la Lune L sur le même horison, de 26 deg. 42 min. sa distance D^E au Méridien H^ZO, de 31 deg. 13 min. avec

sa Parallaxe de hauteur LT, de 52 min. 27 sec.
 & il faut trouver la Parallaxe DB de l'ascen-
 sion droite γ QED de cette Planete, avec la Pa-
 rallaxe FT de sa déclinaison DL qui est Méri-
 dionale.

Solution. 1^{re}, dans le triangle-Sphérique obliquangle L郑, on connoît le côté ZP de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisque ce côté est le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. 10 sec. le côté ZL de 63 deg. 18 min. puisque ce côté est le complément de la hauteur CL de la Planete proposée, qui est donnée de 26 deg. 42 min. avec l'angle LPZ, ou DPE, de 31 d. 13 min. puisque la distance DE de la même Planete au Méridien HZO, qui (a) est (a) N. 196. la mesure de cet angle, est donnée de cette grandeur. Ainsi, après avoir supposé (b) (b) N. 297. un arc ZM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté LP, (qu'il rencontre en un point M, parce que les angles ZPL & ZLP sont de même espece,) on cherche de la manière suivante (c), l'angle (c) N. 283. PZM du triangle-Sphérique M郑, qui [c] est rectangle en M.

Complément du logarithme du sinus du complément
 de l'hypoténuse ZP trouvée de 41 deg. 9 min. 50 sec. 0.2233022
 Logarithme de la tangente du complément de l'angle
 MPZ, ou LPZ, trouvé de 31 deg. 13 min. - - 10.2175156

Logarithme de la tangente de l'angle PZM - - 10.3408167

qui (d) donne 65 deg. 28 min. 34 sec. pour la valeur de cet (d) N. 103. angle.

496 TRAITE' COMPLET

2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 63 deg. 18 min. avec l'angle au sommet PZM que l'on vient de trouver de 65 deg. 28 min. 34 sec. Ainsi, (a) N. 305. l'on cherche de la manière suivante (a), l'autre angle au sommet LZM.

Complément du logar. de la tang. du complément du côté ZP trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec.	-	9.9416710
Log. de la tang. du complément du côté ZL trouvé de 63 deg. 18 min.	- - - - -	9.7015227
Logar. du sinus du complément de l'angle PZM trouvé de 65 deg. 28 min. 34 sec.	- - - - -	9.6181140

Logar. du sinus du compl. de l'angle LZM - 29.2613177

(b) N. 103. qui (b) donne 10 deg. 31 min. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 79 deg. 29 min. pour celle de cet angle; laquelle étant ajoutée à l'angle PZM, que l'on a trouvé de 65 deg. 28 min. 34 sec. donne 144 deg. 57 min. 34 sec. pour la valeur de l'angle LZF.

3^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZP, on connoît l'angle LPZ que l'on a trouvé de 31 d. 13 m. l'angle LZF que l'on vient de trouver de 144 d. 57 m. 34 s. avec le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 63 d. 18 m. Ainsi, l'on (c) N. 291. cherche de la manière suivante (c), le côté LP.

Complément du logar. du sinus de l'angle LPZ trouvé de 31 deg. 13 min.	- - - - -	0.2854591
Logar. du sinus de l'angle LZF trouvé de 144 deg. 57 min. 34 sec.	- - - - -	9.7590300
Logar. du sinus du côté ZL trouvé de 63 deg. 18 min.	- - - - -	9.9510310

Logar. du sinus du côté LP - 29.9955011

(d) N. 103. qui (d) donne 98 deg. 13 min. 58 sec. pour la valeur de ce côté;

côté, qui vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle ; & par conséquent, 8 deg. 13 min. 58 sec. pour la vraie déclinaison DL de la Planete proposée.

4^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît le côté TZ de 64 deg. 10 min. 27 sec. puisque ce côté est la somme de l'arc ZL que l'on a trouvé de 63 degrés 18 min. & de la parallaxe de hauteur LT qui est donnée de 52 min. 27 sec. le côté ZP que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. avec l'angle TZP, ou Lzp, que l'on a aussi trouvé de 144 deg. 57 min. 34 sec. Ainsi, après avoir supposé (a) un arc TN d'un grand (a) N. 297. cercle, tiré du sommet de l'angle T perpendiculairement au côté ZP, (prolongé vers N, parce que les angles TZP & TPZ sont de différente espece,) on cherche de la manière suivante (b), le côté NZ du triangle-Sphérique NTZ qui [c] est rectangle en N, & dont l'angle TZN est le supplément de l'angle connu TZP. (b) N. 284.

Complément du logar. du sinus du complément de l'angle TZN trouvé de 35 deg. 2 min. 26 sec. 0.0868509

Logar. de la tangente du complément de l'hypoténuse TZ trouvée de 64 deg. 10 min. 27 sec. 9.6848231

Logar. de la tang. du compl. du côté NZ - - - 9.7716740

qui (c) donne 30 deg. 35 min. 17 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 59 deg. 24 min. 43 sec. pour celle de ce côté; laquelle étant ajoutée au côté ZP, que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. donne 100 deg. 34 min. 33 sec. pour la valeur du segment NZP. (c) N. 103.

5^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle
Rrr

498. TRAITE' COMPLET

ZTP, on connoît le segment NZP que l'on vient de trouver de 100 deg. 34 min. 33 sec. le segment NZ que l'on vient aussi de trouver de 59 deg. 24 min. 43 sec. avec l'angle TZP que l'on a trouvé de 144 deg. 57 min. 34 sec.

- (a) N. 317. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (a), l'autre angle TPZ.

Complément du logar. du sinus du segment NZP	
trouvé de 100 deg. 34 min. 33 sec.	0.0074408
Logar. du sinus du segment NZ trouvé de 59 deg.	
24 min. 43 sec.	9.9349265
Logar. de la tangente de l'angle TZP trouvé de	
144 deg. 57 min. 34 sec.	9.8458809

Logar. de la tangente de l'angle TPZ - - - 19.7882482

- (b) N. 103. qui (b) donne 31 deg. 33 min. 16 sec. p. p. pour la valeur de cet angle; de laquelle ayant retranché l'angle LPZ, que l'on a trouvé de 31 deg. 13 min. le reste 20 min. 16 sec. est la valeur de l'angle TPL, ou BPD; & par conséquent, celle de la

- (c) N. 196. première parallaxe demandée DB, puisque (c) cette parallaxe est la mesure de cet angle.

6^{ent}, enfin, dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTP, on connoît l'angle TPZ, que l'on vient de trouver de 31 deg. 33 min. 16 sec. l'angle TZP que l'on a trouvé de 144 deg. 57 min. 34 sec. avec le côté TZ que l'on a aussi trouvé de 64 d. 10 m. 27 f. Ainsi, l'on

- (d) N. 291. cherche de la manière suivante (d), le côté TP.

Complément du logarithme du sinus de l'angle TPZ	
trouvé de 31 deg. 33 min. 16 sec.	0.2812421
Logar. du sinus de l'angle TZP trouvé de 144 deg.	
57 min. 34 sec.	9.7590309
Logar. du sinus du côté TZ trouvé de 64 deg.	
10 min. 27 sec.	9.9543016

Logarithme du sinus du côté TP - - - 19.9945738

- (e) N. 103. qui (e) donne 99 deg. 2 min. 18 sec. pour la valeur de ce côté

qui vaut plus que le quart de la circonférence d'un cercle ; & par conséquent , 9 deg. 2 min. 18 sec. pour la valeur de la déclinaison apparente BT de la Planete proposée. Ainsi , si de cette déclinaison on retranche la vraie déclinaison DL , que l'on a trouvée de 8 deg. 13 min. 58 sec. le reste 48 min. 20 sec. est la valeur de la seconde parallaxe demandée FT.

XXXII. USAGE.

448. *Connoissant la hauteur du Pôle sur l'horison d'un certain lieu , avec celle d'une Planete quelconque sur le même horison , la vraie longitude de cette Planete , sa parallaxe de hauteur , l'obliquité de l'Ecliptique , le lieu du Soleil , & l'heure ; trouver les parallaxes de longitude , & de latitude de cette même Planete.*

La hauteur OP^* du Pôle P sur l'horison HO , * Fig. 20a. est de 48 deg. 50 min. 10 sec. la hauteur CL de la Lune L sur le même horison , est de 41 d. 28 min. la vraie longitude γFVD de cette Planete , est de 149 deg. 12 min. 50 sec. sa parallaxe de hauteur LT , est de 47 min. 32 sec. l'obliquité $E\Delta V$ de l'Ecliptique VK , est de 23 deg. 28 min 30 sec. le lieu S du Soleil est le 18^{me} deg. 45 min. du Ω : enfin , il est 10 heures du matin ; & il faut trouver la parallaxe DB de la longitude γFVD de cette même Planete , avec la parallaxe RL de sa latitude DL.

Solution. 1^{er}. Dans le triangle - Sphérique $eS\Delta$ qui est rectangle en e , on connoît l'angle $e\Delta S$, ou $E\Delta V$, de 23 deg. 28 m. 30 s.
Rrr ij

puisque cet angle est donné de cette grandeur, avec l'hypoténuse $S\alpha$ de 41 d. 15 m. puisque l'arc $\gamma VS\alpha$ est de 180 deg. & que le lieu S du Soleil étant donné au 18^{me} deg. 45 min. du Ω , l'arc γVS doit être de 138 degrés 45 min. Ainsi, l'on cherche de la manière (a) N. 284. suivante (a), le côté $e\alpha$ de ce triangle.

Complément du logarithme du sinus du complément
de l'angle $e\alpha S$ donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. 0.0375199
Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse $S\alpha$ trouvée de 41 deg. 15 min. - - 10.0570121

Logar. de la tang. du compl. du côté $e\alpha$ - - - 10.0945310

- (b) N. 193. qui (b) donne 51 deg. 11 min. 13 sec. p. p. pour la valeur de ce complément; & par conséquent, 38 deg. 48 min. 47 sec. pour celle de ce côté, à laquelle ayant ajouté l'arc $E\alpha$, qui est de 30 deg. (puisque la distance du Soleil au Méridien HZO, dont cet arc est la mesure (c), est donnée de 2 heures), on a 68 deg. 48 min. 47 sec. pour la valeur de l'arc $Ee\alpha$; & par conséquent, 21 deg. 11 min. 13 sec. pour celle du complément αd de ce arc $Ee\alpha$.

- 2^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle $b\alpha d$, on connoît le côté αd de 21 d. 11 min. 13 sec. puisque l'on vient de le trouver de cette grandeur: l'angle $b\alpha d$ de 23 deg 28 m. 30 s. puisque cet angle est l'obliquité de l'Ecliptique, qui est donnée de cette grandeur: avec l'angle αdb , ou $E\alpha H$, de 41 deg. 9 min. 50 sec. (d) N. 196. puisque (d) ce dernier angle a pour mesure la hauteur HE de l'Equateur, & par conséquent, le complément de la hauteur OP du Pôle P, qui est donnée de 48 deg. 50 min. (e) N. 197. 10 s. Ainsi, après avoir supposé (e) un arc αM d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle

DE TRIGONOMETRIE. 301

perpendiculairement au côté bd , (prolongé vers M , parce que les angles $\angle abd$ & $\angle adb$ sont de différente espèce,) on cherche de la manière suivante (a), l'angle $\angle dM$ du triangle Sphérique $M\hat{a}d$ qui [c] est rectangle en M .

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse $\hat{a}d$ trouvée de 21 deg. 11 min. 13 sec. - - - - - 0.0303948

Logarithme de la tangente du complément de l'angle $\angle dM$, ou $\angle db$, trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. 10.0583290

Logarithme de la tangente de l'angle $M\hat{a}d$ - - 10.0887238
qui (b) donne 50 deg. 48 min. 44 sec. pour la valeur de cet (b) N. 103.
angle ; de laquelle ayant retranché l'angle $b\hat{a}d$, qui est donné de 23 deg. 28 min. 30 sec. il reste 27 deg. 20 min. 14 sec. pour la valeur de l'angle $M\hat{a}b$.

3^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle $b\hat{a}d$, on connoît l'angle au sommet $M\hat{a}d$ que l'on vient de trouver de 50 deg. 48 min. 44 sec. l'autre angle au sommet $M\hat{a}b$ que l'on vient aussi de trouver de 27 deg. 20 min. 14 sec. avec l'angle $\angle adb$ que l'on a trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (c), l'angle $\angle bM$. †(c) N. 310

Complément du logar. du sinus de l'angle $M\hat{a}d$ trouvé de 50 deg. 48 min. 44 sec. - - - 0.1026539

Logarithme du sinus de l'angle $M\hat{a}b$ trouvé de 27 deg. 20 min. 14 sec. - - - - - 9.6620271

Logarithme du sinus du complément de l'angle $\angle adb$ trouvé de 41 deg. 9 min. 50 sec. - - - - - 9.8766969

Logar. du sinus du complément de l'angle $\angle bM$ - 29.6493779
qui (d) donne 26 deg. 29 min. 24 sec. pour la valeur de ce (d) N. 103.

† C'est l'angle $\angle abd$ que l'on doit se proposer de chercher (e) : mais comme cet angle est obtus, on trouve immédiatement (e) N. 310 l'angle demandée $\angle bM$.

- (a) N. 398. complément; & par conséquent, 63 deg. 30 min. 36 sec. pour celle de cet angle. Mais (a), cet angle qui est formé par l'Ecliptique VK & par l'horison HO., a pour mesure l'arc FG du cercle vertical ZFG qui est tiré du Zénith Z par le 90^{me} degré F de ce même Ecliptique. Ainsi, cet arc FG est aussi de 63 deg. 30 min. 36 sec. †

4^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle $b\hat{a}d$, on connoît l'angle $\hat{a}bd$ de 116 deg. 29 min. 24 sec. puisque cet angle est le supplément de l'angle $\hat{a}bM$ que l'on vient de trouver de 63 deg. 30 min. 36 sec. l'angle $\hat{a}db$ de 41 deg. 9 min. 50 sec. puisqu'on l'a trouvé de cette grandeur: avec le côté $\hat{a}d$ que l'on a aussi trouvé de 21 deg. 11 min. 13 sec. Ainsi, l'on cherche de la manière suivante (b), le côté $\hat{a}b$.

Complément du logarithme du sinus de l'angle $\hat{a}bd$	
trouvé de 116 deg. 29 min. 24 sec.	- - - 0.0481711
Logarithme du sinus de l'angle $\hat{a}db$ trouvé de 41 deg.	
9 min. 50 sec.	- - - 9.8183678
Logarithme du sinus du côté $\hat{a}d$ trouvé de 21 deg.	
11 min. 13 sec.	- - - 9.5580017
Logarithme du sinus du côté $\hat{a}b$	- - - 89.4245416

- (c) N. 103. qui (c) donne 15 deg. 24 min. 50 sec. pour la valeur de ce côté; laquelle étant ajoutée à l'arc $\gamma FV\hat{a}$, qui est de 180 deg. donne 195 deg. 24 min. 50 sec pour la valeur de l'arc $\gamma FV\hat{a}b$; & par conséquent, si de ce dernier arc on retranche l'arc $FV\hat{a}b$ de 90 deg. le reste γF est de 105 deg. 24 min. 50 sec.

† Nous aurions pu chercher le 90^{me} deg. F de l'Ecliptique VI, & l'angle $\hat{a}bM$ que ce cercle forme avec l'horison HO, de la même manière dont nous l'avons fait au n° 396 qui est la plus courte. Mais nous avons pris ici une route différente, afin de faire voir aux commençans qu'il y a souvent plusieurs manières de résoudre le même Problème.

gent, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZI, on connoît le côté ZI de 63 deg. 30 min. 36 sec. puisque les arcs ZFG & FZI étant chacun le quart de la circonférence d'un cercle, l'arc ZI est égal à l'arc FG que l'on a trouvé de cette grandeur : le côté ZL de 48 deg. 32 min. puisque ce côté est le complément de la hauteur CL de la Planete proposée, qui est donnée de 41 deg. 28 min. avec l'angle ZIL, ou FID, de 43 deg. 48 min. puisque (a) cet angle a pour mesure la différence FVD de l'arc VF que l'on vient de trouver de 105 deg. 24 min. 50 sec. à l'arc VFVD qui est donné de 149 deg. 12 min. 50 sec. Ainsi, après avoir supposé (b) un arc ZN (b) N. 297. d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle Z perpendiculairement au côté LI, (qu'il rencontre en un point N, parce que les angles ZIL & ZLI sont de même espece,) on cherche de la manière suivante (c), l'angle NZI du triangle-Sphérique NZI qui [c] est rectangle en N. (c) N. 283.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'hypoténuse ZI trouvée de 63 d. 30 m. 36 s. 0.3506246

Logarithme de la tangente du complément de l'angle ZIN, ou ZIL trouvé de 43 deg. 48 min. - 10.0181970

Logarithme de la tangente de l'angle NZI - - 10.3688216

qui (d) donne 66 deg. 50 min. 30 sec. pour la valeur de cet (d) N. 103. angle.

6^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZI, on connoît le côté ZI que l'on a trouvé de 63 deg. 30 min. 36 sec. le côté ZL

504 . TRAITE' COMPLET

que l'on a aussi trouvé de 48 deg. 32 min. avec l'angle au sommet NZI que l'on vient de trouver de 66 deg. 50 min. 30 sec. Ainsi, (a) N. 305. l'on cherche de la manière suivante (a), l'autre angle au sommet LZN.

Complément du logarithme de la tangente du compl.	
du côté ZI trouvé de 63 deg. 30 min. 36 sec. - -	0.3024516
Logarithme de la tangente du complément du côté ZL	
trouvé de 48 deg. 32 min. - - - - -	9.9462995
Logarithme du sinus du complément de l'angle NZI	
trouvé de 66 deg. 50 min. 30 sec. - - -	9.5946946

Logar. du sinus du complément de l'angle LZN	99.8434474
--	------------

(b) N. 103. qui (b) donne 44 deg. 12 min. 51 sec. $\frac{7}{12}$ p. p. pour la valeur de ce complément ; & par conséquent, 45 deg. 47 min. 8 sec. $\frac{5}{12}$ pour celle de cet angle ; laquelle étant ajoutée à l'angle NZI, que l'on a trouvé de 66 deg. 50 min. 30 sec. donne 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$ pour la valeur de l'angle LZI.

7^{ent}, dans le triangle-Sphérique obliquangle LZI, on connoît l'angle ZIL que l'on a trouvé de 43 deg. 48 min. l'angle LZI que l'on vient de trouver de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$: avec le côté ZL que l'on a aussi trouvé de 48 deg. 32 min. Ainsi, l'on cherche (c) N. 291. de la manière suivante (c), le côté LI.

Complément du logar. du sinus de l'angle ZIL trou-	
vé de 43 deg. 48 min. - - - - -	0.1598041
Logarithme du sinus de l'angle LZI trouvé de	
112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{5}{12}$ - - - - -	9.9652144
Logarithme du sinus du côté ZL trouvé de 48 deg.	
32 min. - - - - -	9.8746795

Logarithme du sinus du côté LI - - - - -	99.9996951
--	------------

(d) N. 103. qui (d) donne 87 deg. 51 min. 46 sec. p. m. pour la valeur de ce côté ; dont le complément 2 deg. 8 min. 14 sec. est la vraie latitude DL de la Planete proposée.

8^{ent}, dans

DE TRIGONOMETRIE. 103

Ent. Dans le triangle-Sphérique obliquangle ZTI, on connoît le côté TZ. de 49 degrés 19 min. 32 sec. puisque ce côté est la somme de l'arc ZL que l'on a trouvé de 48 degrés 32 min. & de la parallaxe de hauteur LT qui est donnée de 47 min. 32. sec: le côté ZI que l'on a trouvé de 63 deg. 30 min 36 f. avec l'angle TZI, ou LZI, que l'on a aussi trouvé de 112 deg. 37 min. 38 sec. Ainsi, après avoir supposé (a) un arc TX d'un grand cercle, tiré du sommet de l'angle T perpendiculairement au côté ZI (prolongé vers X, parce que les angles TZI & TIZ sont de différente espèce;) on cherche de la manière suivante (b) le côté XZ du Triangle-sphérique X^tTZ (b) N. 184 qui (c) est rectangle en X, & dont l'angle TZX est le supplément de l'angle connu TZI.

Complément du logarithme du sinus du complément de l'angle TZX trouvé de 67 deg. 22 min.

221 sec. 0.4149374

Logarithme de la tangente du complément de l'hypoténuse TZ trouvée de 49 deg. 19 min. 32 sec. 9.9341751

Logar. de la tang. du complément du côté XZ - 10.3490124

qui (c) donne 65 deg 52 min 55 sec. p. m. pour la valeur de (c) N. 103. ce complément; & par conséquent, 24 deg. 7 min. 5 sec. pour celle de ce côté; laquelle étant ajoutée au côté ZI, que l'on a trouvé de 63 deg. 30 min. 36 sec. donne 87 deg. 37 min. 41 sec. pour la valeur du segment XZI.

Ent. Dans le Triangle-sphérique obliquangle ZTI, on connoît le segment XZI que l'on vient de trouver de 87 degrés 37 min. 41 sec.

306. TRAITE' COMPLET

le segment XZ que l'on vient aussi de trouver de 24 deg. 7 min. 5 sec. avec l'angle TZI que l'on a trouvé de 112 deg. 37 min. 38 secondes $\frac{1}{12}$. Ainsi, l'on cherche de la manière

a) N. 317. suivante (a), l'autre angle TIZ.

Complément du logarithme du sinus du segment XZI	
trouvé de 87 deg. 37 min. 41 sec. - - -	0.0003725
Logarithme du sinus du segment XZ trouvé de	
24 deg. 7 min. 5 sec. - - -	9.6113176
Logarithme de la tangente de l'angle TZI trouvé	
de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{1}{12}$ - - -	10.3800517

Logarithme de la tangente de l'angle TIZ - - - 29.9917416

- (b) N. 103. qui (b) donne 44 deg. 27 min. 19 sec. pour la valeur de cet angle ; de laquelle ayant retranché l'angle ZIL, que l'on a trouvé de 43 deg. 48 min. le reste 39 min. 19 sec. est la valeur de l'angle TIL, ou BID ; & par conséquent, celle de la
- (c) N. 196. première parallaxe demandée DB, puisque (c) cette parallaxe est la mesure de cet angle.

10^{ent}. Enfin, dans le Triangle-sphérique obliquangle ZTI, on connoît l'angle TIZ que l'on vient de trouver de 44 deg. 27 min. 19 secondes : l'angle TZI que l'on a trouvé de 112 deg. 37 min. 38 sec. $\frac{1}{12}$ avec le côté TZ que l'on a aussi trouvé de 49 degrés 19 min. 32 sec. Ainsi, l'on cherche de la

(d) N. 291. manière suivante (d), le côté TI.

Complément du logarithme du sinus de l'angle TIZ	
trouvé de 44 deg. 27 min. 19 sec. - - -	0.1546811
Logar. du sinus de l'angle TZI trouvé de 112 deg.	
37 min. 38 sec. $\frac{1}{12}$ - - -	9.965214
Logarithme du sinus du côté TZ trouvé de 49 deg.	
19 min. 32 sec. - - -	9.8799117

Logar. du sinus du côté TI. . - - - 29.9998104

- (e) N. 103. qui (e) donne 88 deg. 18 min. 26 sec. pour la valeur de a

côté ; dont le complément 1 deg. 41 min. 34 sec. est la valeur de la latitude apparente BT de la planette proposée. Ainsi , si l'on retranche cette latitude de la vraie latitude DL , que l'on a trouvée de 2 deg. 8 min. 14 sec. le reste 26 min. 40 sec. est la valeur de la seconde parallaxe demandée RL.

SCHOLIE I.

449. *On cherche les réfractions d'ascension droite , de déclinaison , de longitude , & de latitude d'un Astre dont on connoît la réfraction de hauteur , de la même manière dont nous venons de chercher dans ces deux derniers Usages , les parallaxes d'ascension droite , de déclinaison , de longitude , & de latitude d'une Planette dont nous connoissons la parallaxe de hauteur.*

SCHOLIE II.

450. VOILA presque toutes les Questions astronomiques qui dépendent de la Trigonométrie sphérique ; & celles que nous avons omises ne peuvent causer aucune difficulté. Ainsi , si l'on joint à ce Traité une bonne Théorie des Planettes , on aura tout ce qui sera nécessaire pour s'instruire parfaitement de l'Astronomie.

FIN.

A P P R O B A T I O N .

J'AI lu par l'ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé, **TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMETRIE**, contenant &c. par M. Audierne, & je n'y ai rien trouvé qui en puisse empêcher l'impression. A Paris le 17 Décembre 1749.

G L A S, A U T H

P R I V I L È G E D U R O I .

L O U I S, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & fidèles Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. **SALUT**. Notre amé **CLAUDE VAN-BAPTISTE HÉRISSEAU** fils, Libraire à Paris, nous a fait espérer qu'il désireroit faire imprimer & donner au public un Ouvrage qui a pour titre : *Traité complet de Trigonometrie*, s'il nous plaçoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires. À ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de trois années consécutives à compter du jour de la date des présentes; Faisons défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout-au-long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée attachée pour modèle sous contre-scel des présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1724. qu'avant de l'exposer en vente le manuscrit qui aura servi de copie à la réimpression dudit Ouvrage, qu'il y ait mis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, es mains de notre oncle & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en fera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire sur ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il lui soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des présentes qui sera imprimée tout-au-long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Chartre Normande & autres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-quatrième jour du mois de Janvier l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre règne le trente-cinquième. Par le Roi en son Conseil.

Signé, SAINSON.

Registré sur le Registre xij. de La Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 389. fol. 269. conformément aux anciens Réglemens confirmés par celui du 8. Février 1723. A Paris le 17. Février 1750.

L E G R A S, Syndic.

A P P R O B A T I O N .

'Ai lu par l'ordre de Monseigneur le Chancelier un Manuscrit intitulé, TRAITÉ COMPLET DE TRIGONOMÉTRIE, contenant &c. par M. Audierne, & je n'y en trouve qui en puisse empêcher l'impression. A Paris, ce 17 Décembre 1749.

CLAUDE

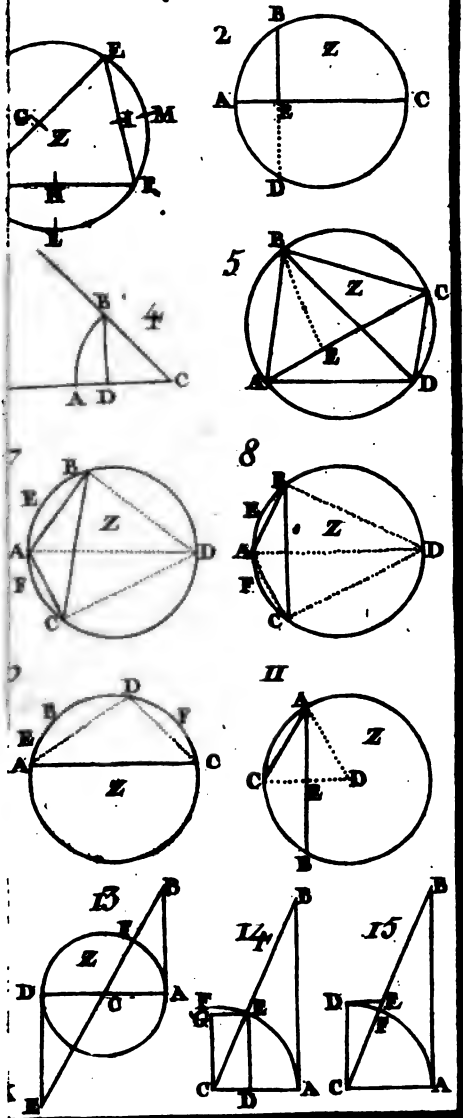
P R I V I L È G E D U R O I .

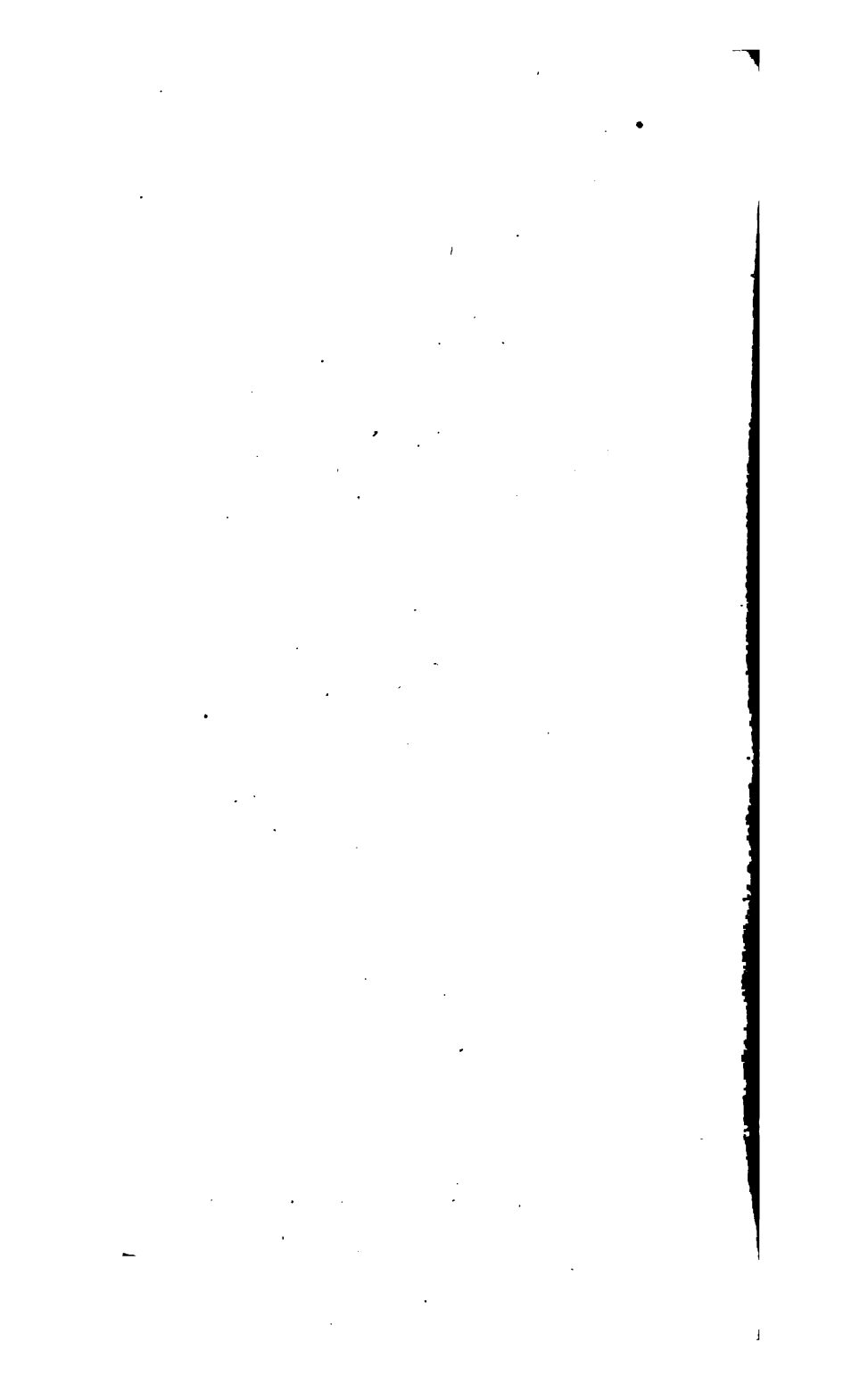
NOUS, par la grâce de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & fidèles Conseillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra. SALUT. Notre amé CLAUDE AN-BARTHELEMY HERISSAUX fils, Libraire à Paris, nous a fait exposer qu'il désireroit imprimer & donner au public un Ouvrage qui a pour titre : *Traité complet de Trigonometrie*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Permission pour ce nécessaires. A ces causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, nous lui avons remis & permettons par ces présentes de faire imprimer ledit Ouvrage en un ou plusieurs volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de le vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le temps de trois années consécutives à compter du jour de la date des présentes; Faisons défenses à tous Libraires, Imprimeurs & autres personnes, de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangère dans aucun lieu de notre obéissance; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout-au-long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément à la feuille imprimée attachée pour modèle sous contre-scel des présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Règlements de la Librairie, & notamment à celui du 10. Avril 1724. qu'avant de l'exposer en vente le manuscrit; qui aura servi de copie à la réimpression dudit Ouvrage, sera mis dans le même état où l'approbation y aura été donnée; & les mains de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en fera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothèque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le Sieur Daguesseau Chancelier de France, le tout à peine de nullité des présentes; du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire voir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il en soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons qu'à la copie des présentes qui sera imprimée tout-au-long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou sergent de ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande & autres à ce contraires. Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le vingt-quatrième jour du mois de Janvier l'an de grace mil sept cent cinquante, & de notre règne le trente-cinquième. Par le Roi en son Conseil.

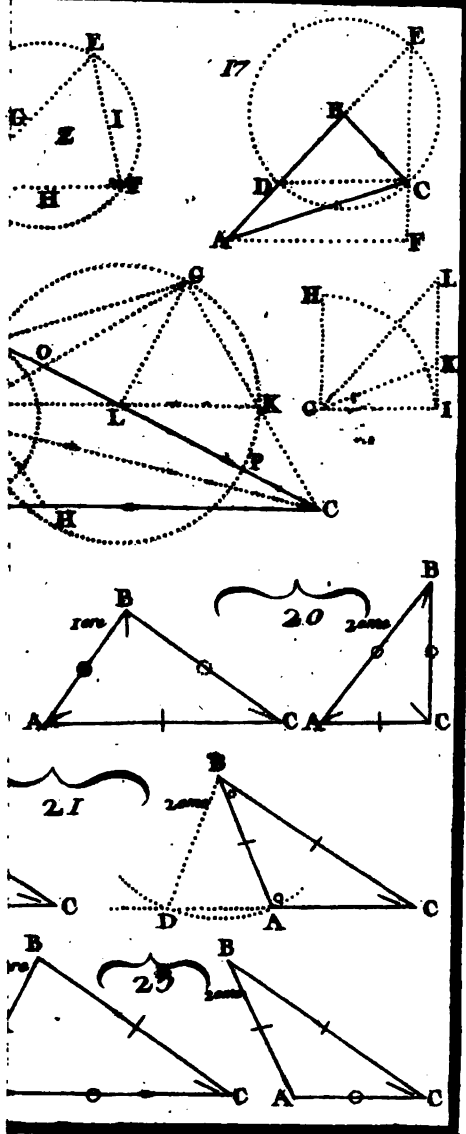
Signé, SAINSON.

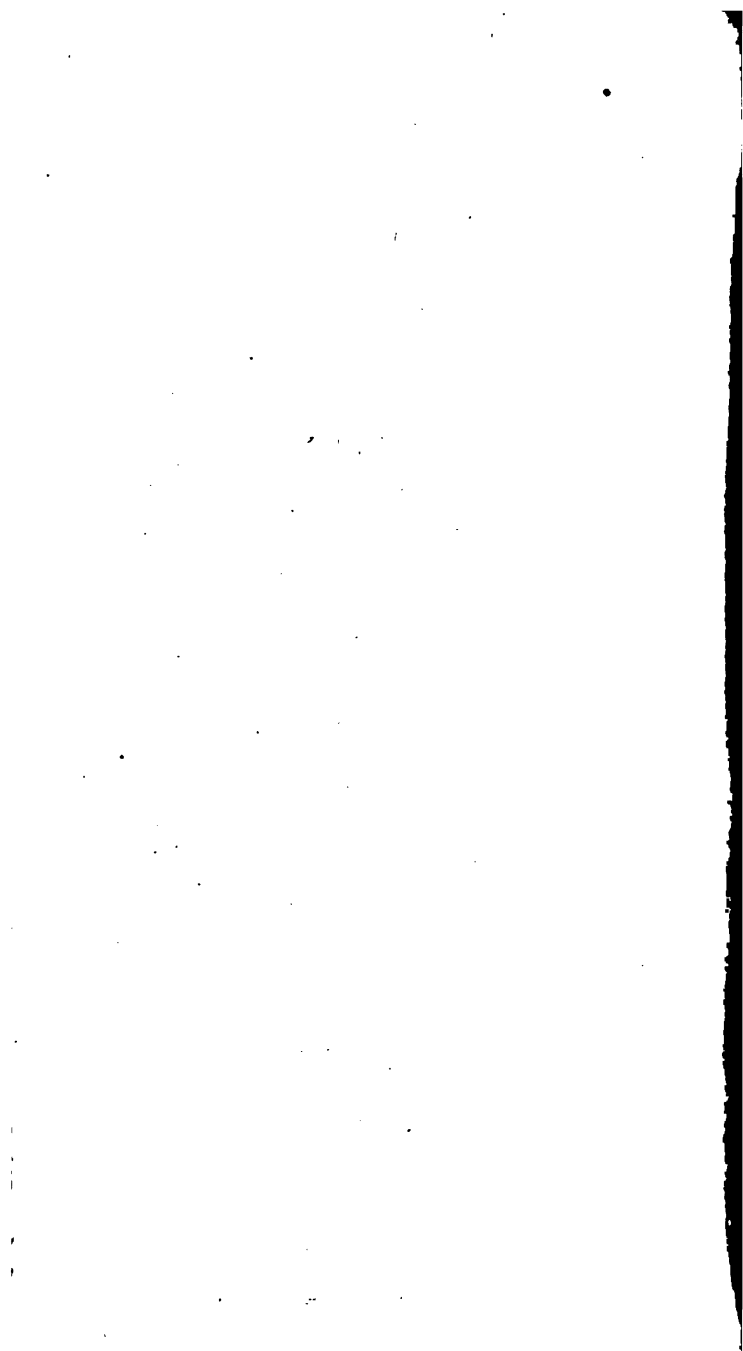
Registré sur le Registre xij. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N°. 389. fol. 269. conformément aux anciens Règlements confirmés par celui du 8. Février 1723. A Paris le 17. Février 1750.

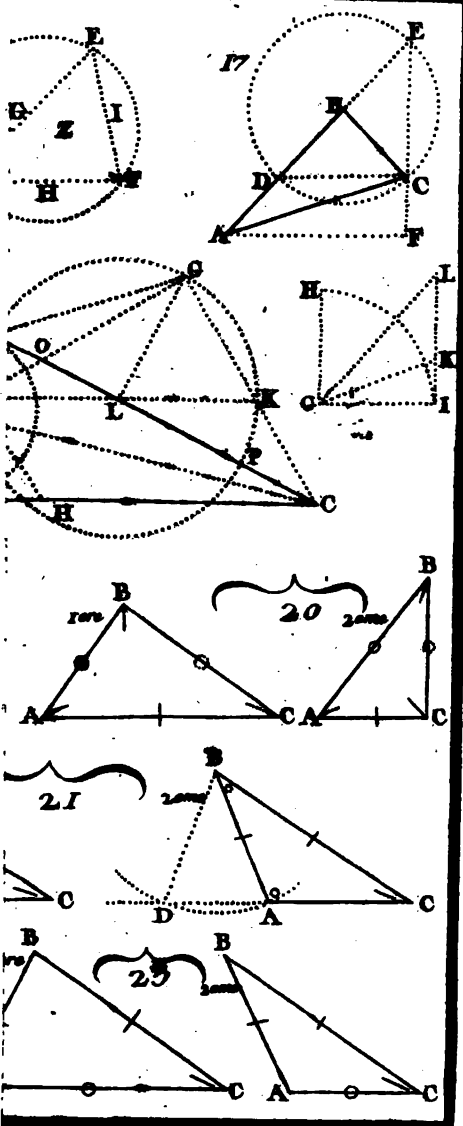
LE GRAS, , Syndic.

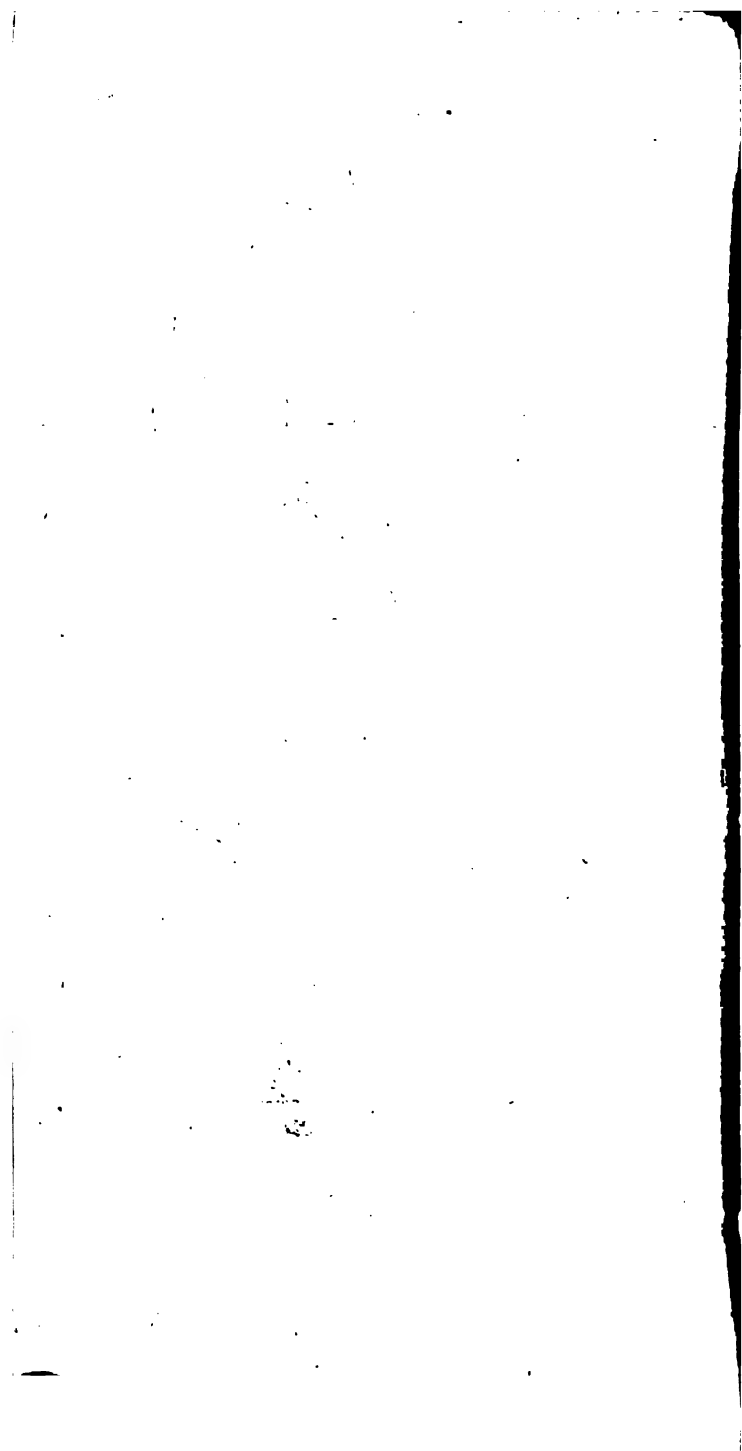


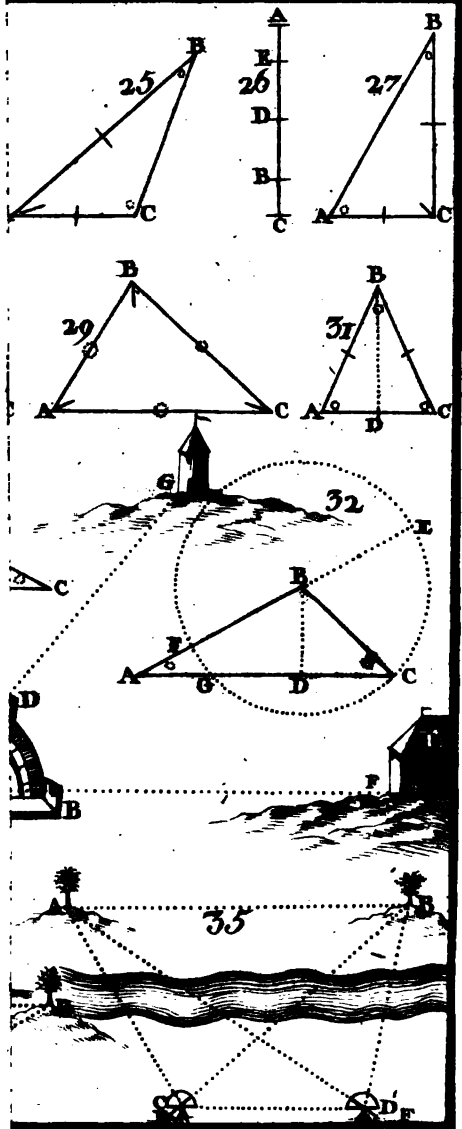




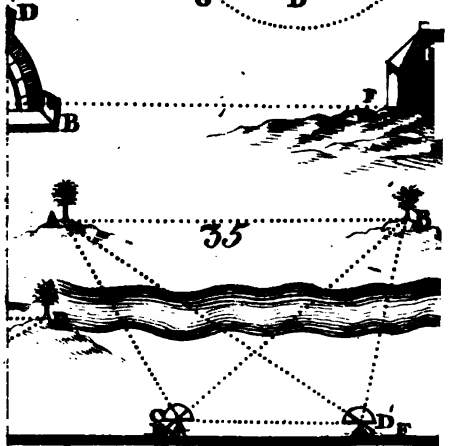
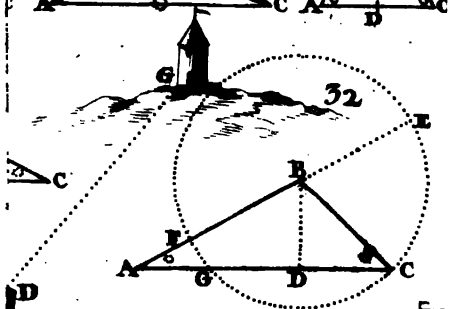
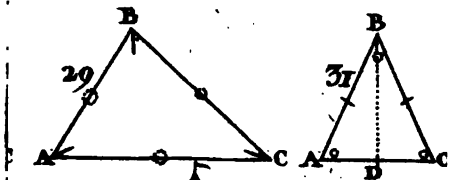
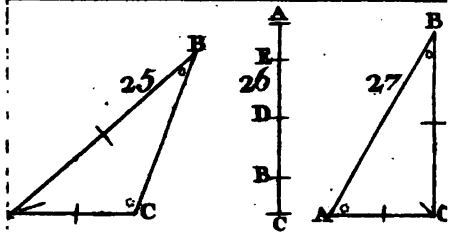


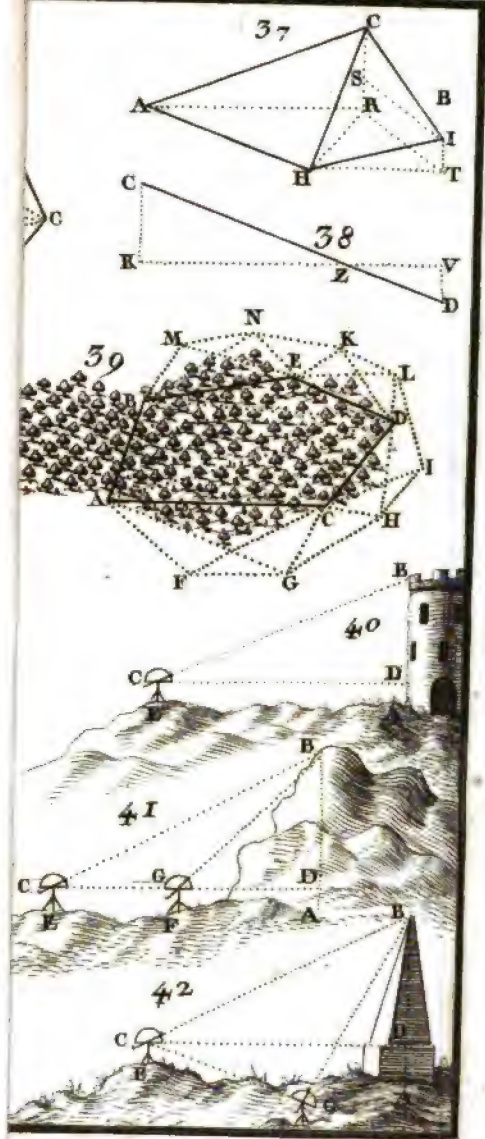


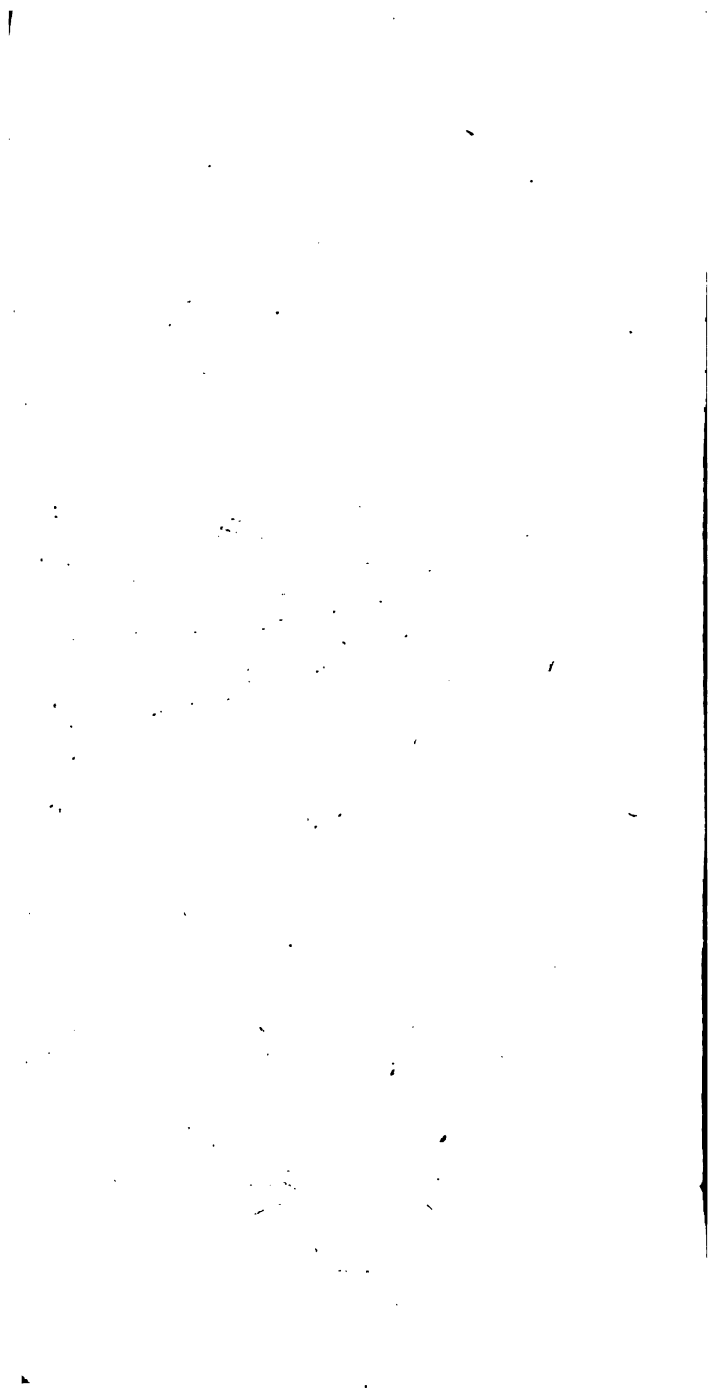


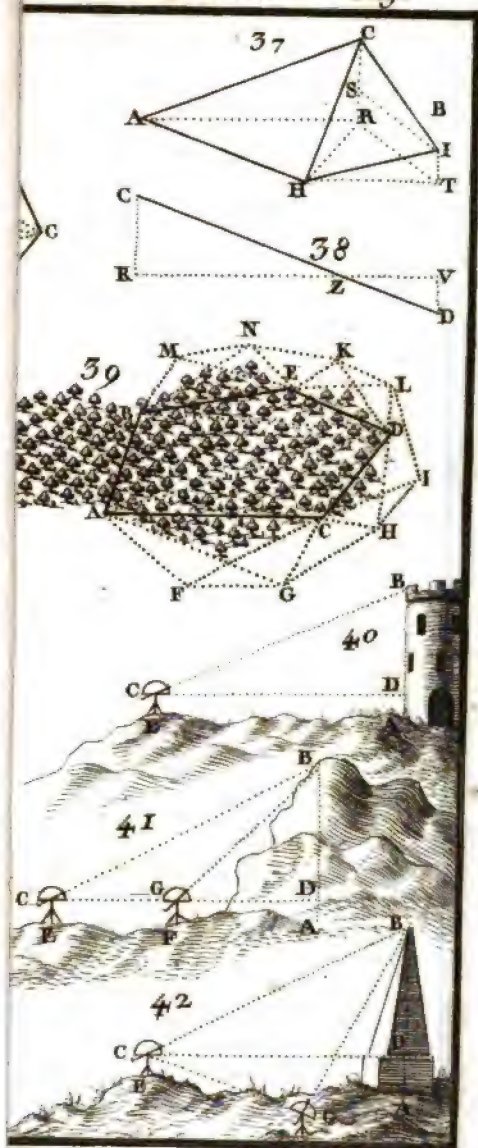


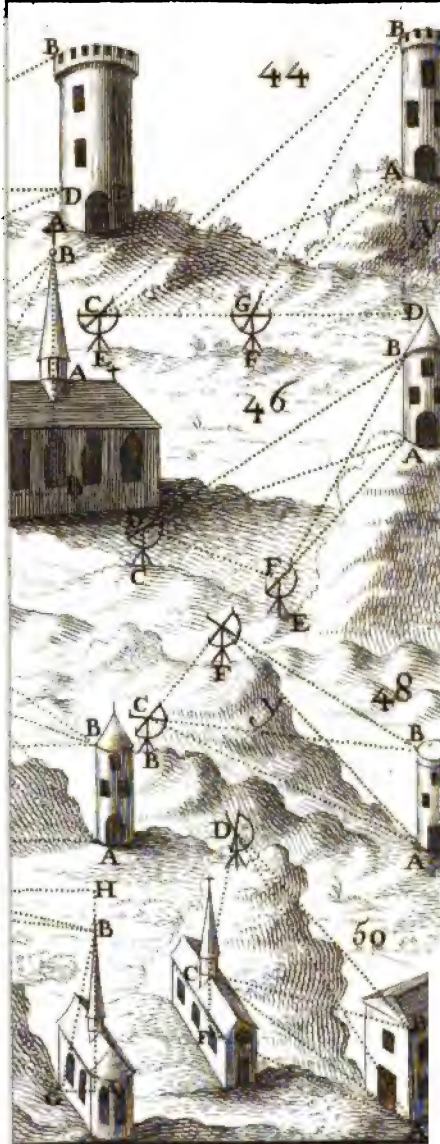
一、
二、
三、
四、
五、
六、
七、
八、
九、
十、
十一、
十二、
十三、
十四、
十五、
十六、
十七、
十八、
十九、
二十、
二十一、
二十二、
二十三、
二十四、
二十五、
二十六、
二十七、
二十八、
二十九、
三十、
三十一、
三十二、
三十三、
三十四、
三十五、
三十六、
三十七、
三十八、
三十九、
四十、
四十一、
四十二、
四十三、
四十四、
四十五、
四十六、
四十七、
四十八、
四十九、
五十、
五十一、
五十二、
五十三、
五十四、
五十五、
五十六、
五十七、
五十八、
五十九、
六十、
六十一、
六十二、
六十三、
六十四、
六十五、
六十六、
六十七、
六十八、
六十九、
七十、
七十一、
七十二、
七十三、
七十四、
七十五、
七十六、
七十七、
七十八、
七十九、
八十、
八十一、
八十二、
八十三、
八十四、
八十五、
八十六、
八十七、
八十八、
八十九、
九十、
九十一、
九十二、
九十三、
九十四、
九十五、
九十六、
九十七、
九十八、
九十九、
一百、











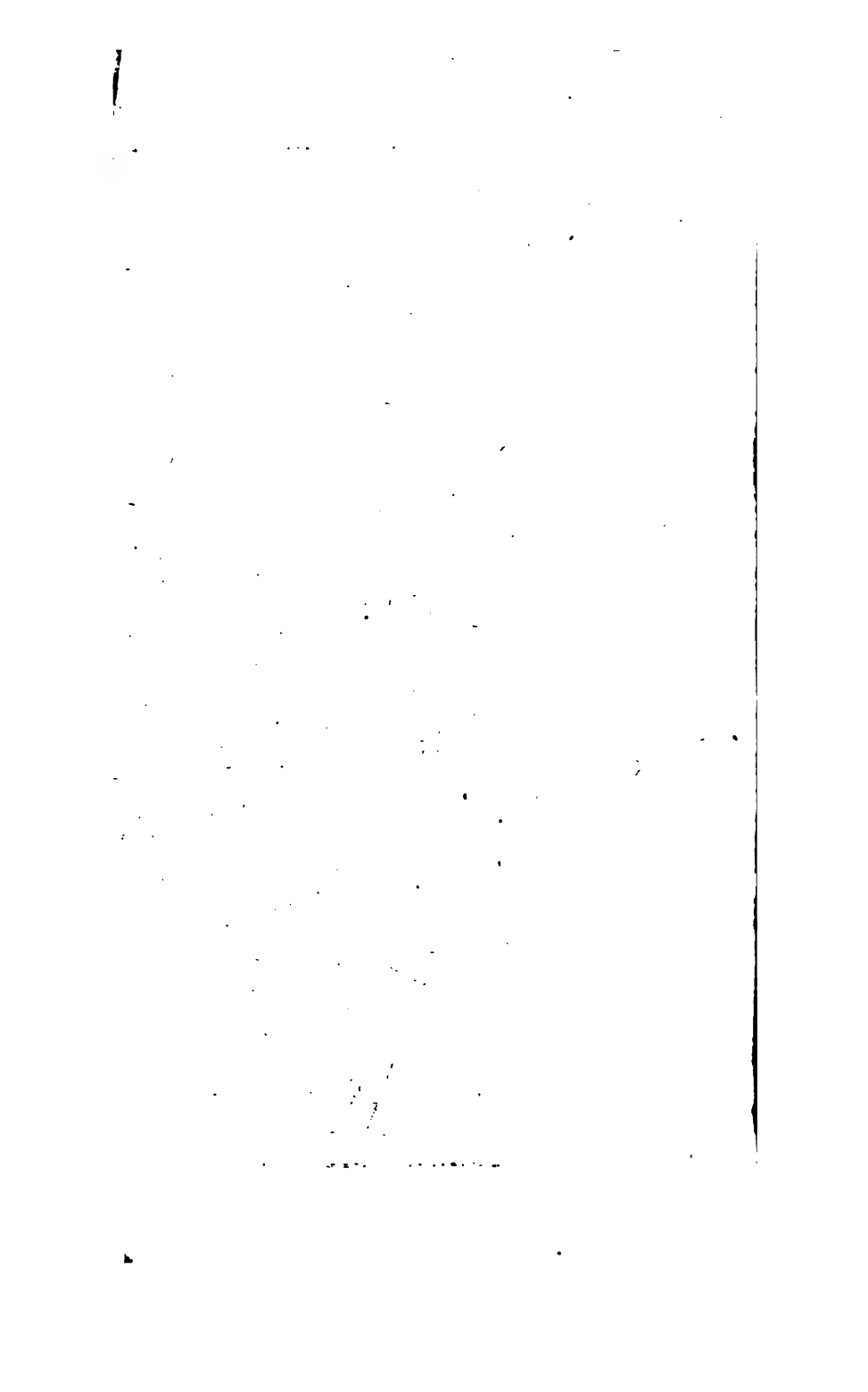
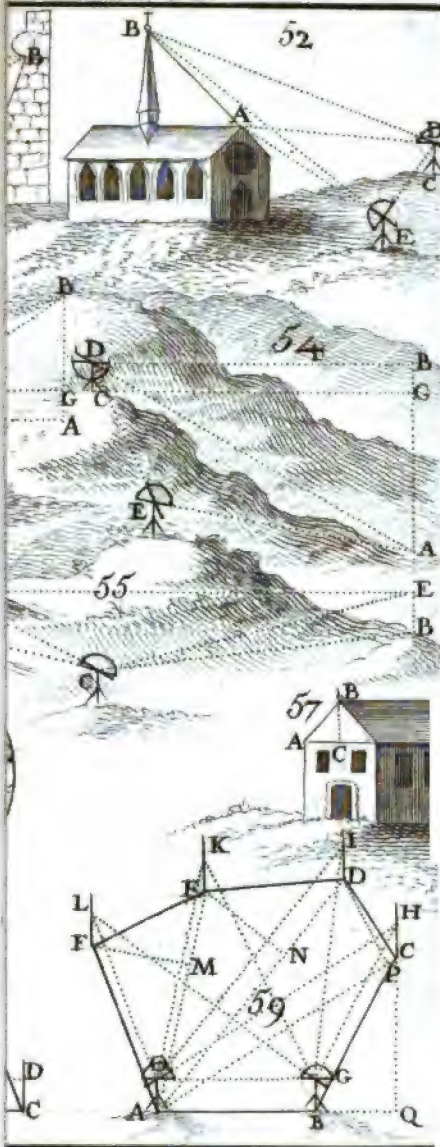


Planche VI.



1

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

1. 1. 1.

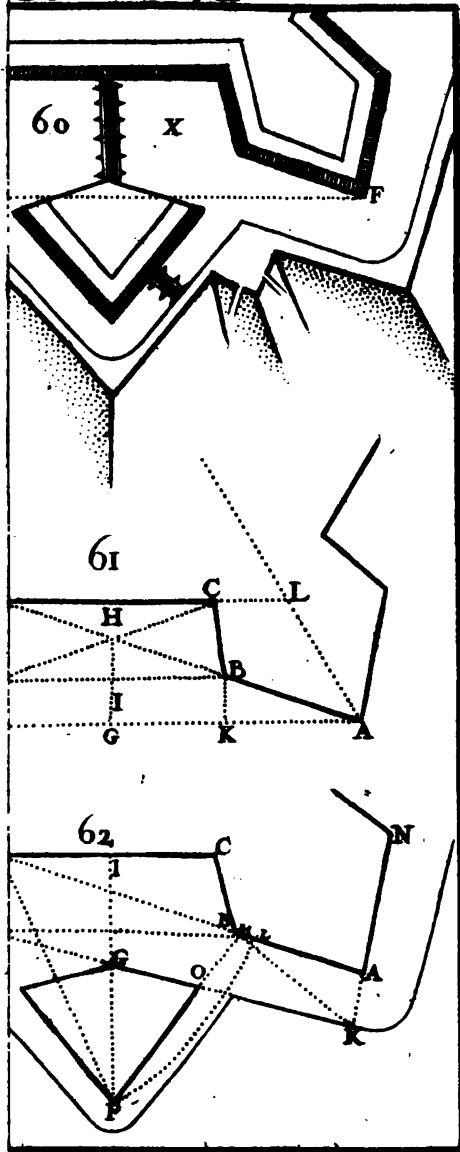
1. 1. 1.

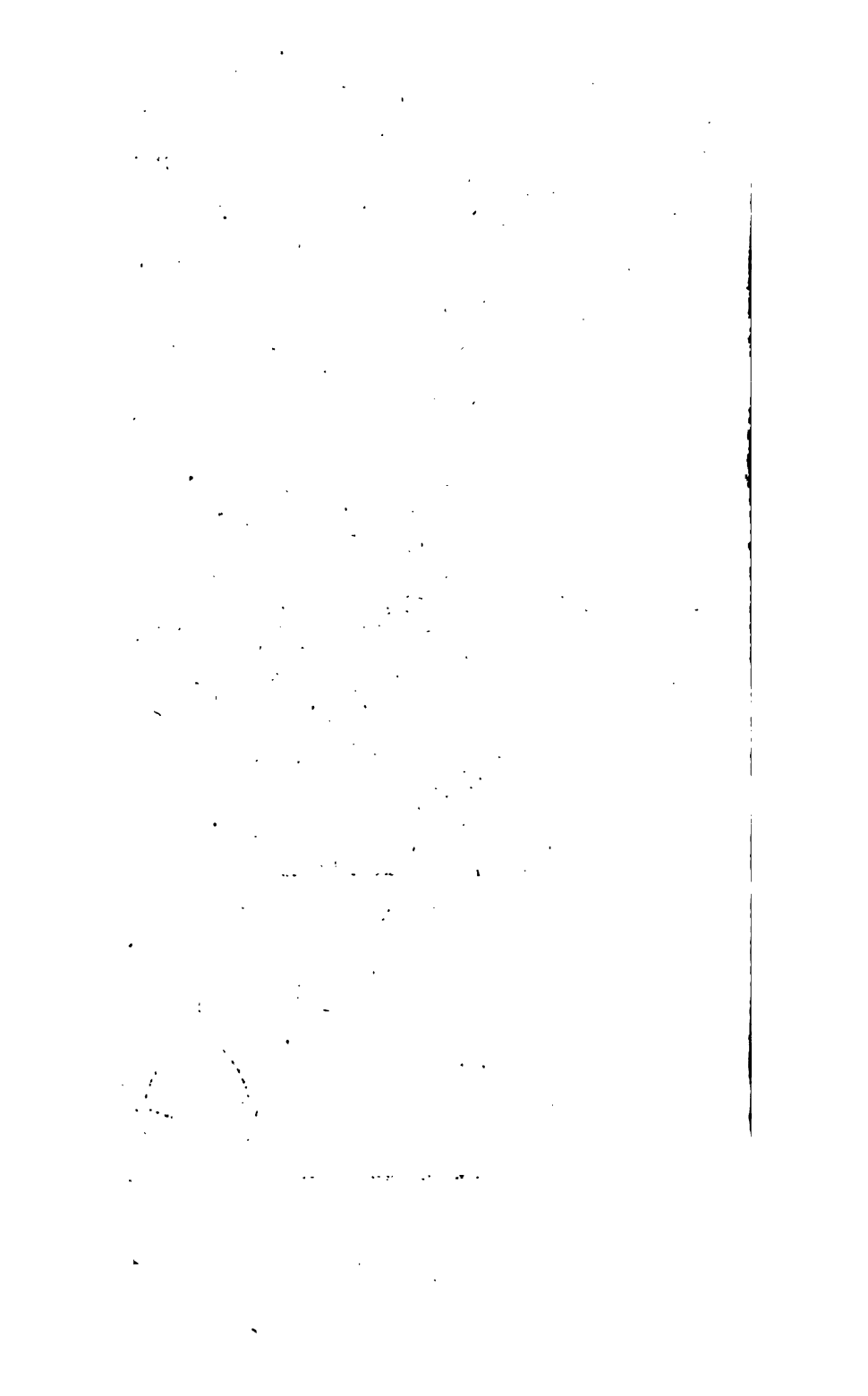
1. 1. 1.

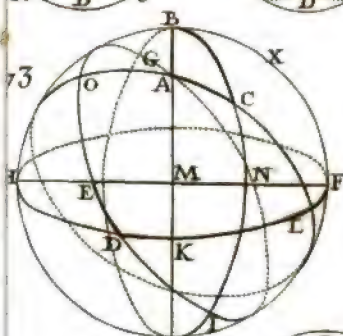
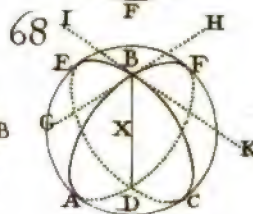
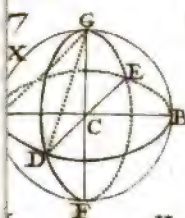
1. 1. 1.

1. 1. 1.

Planche VII

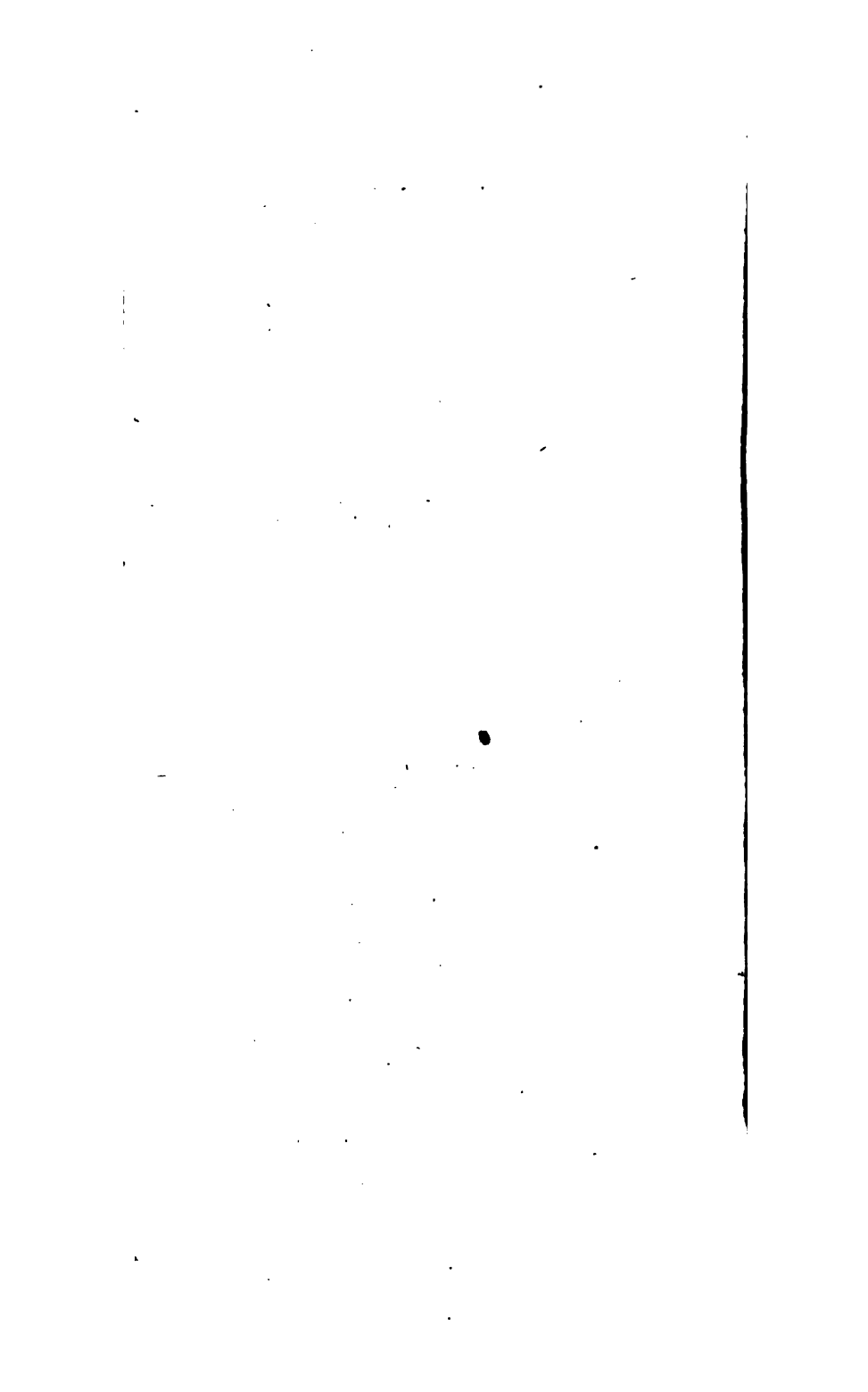




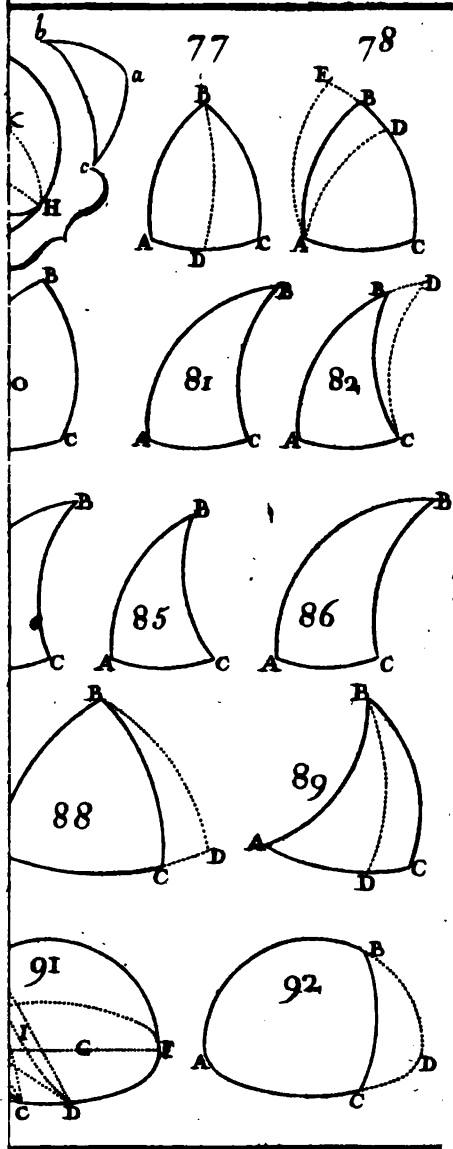


M





anche IX



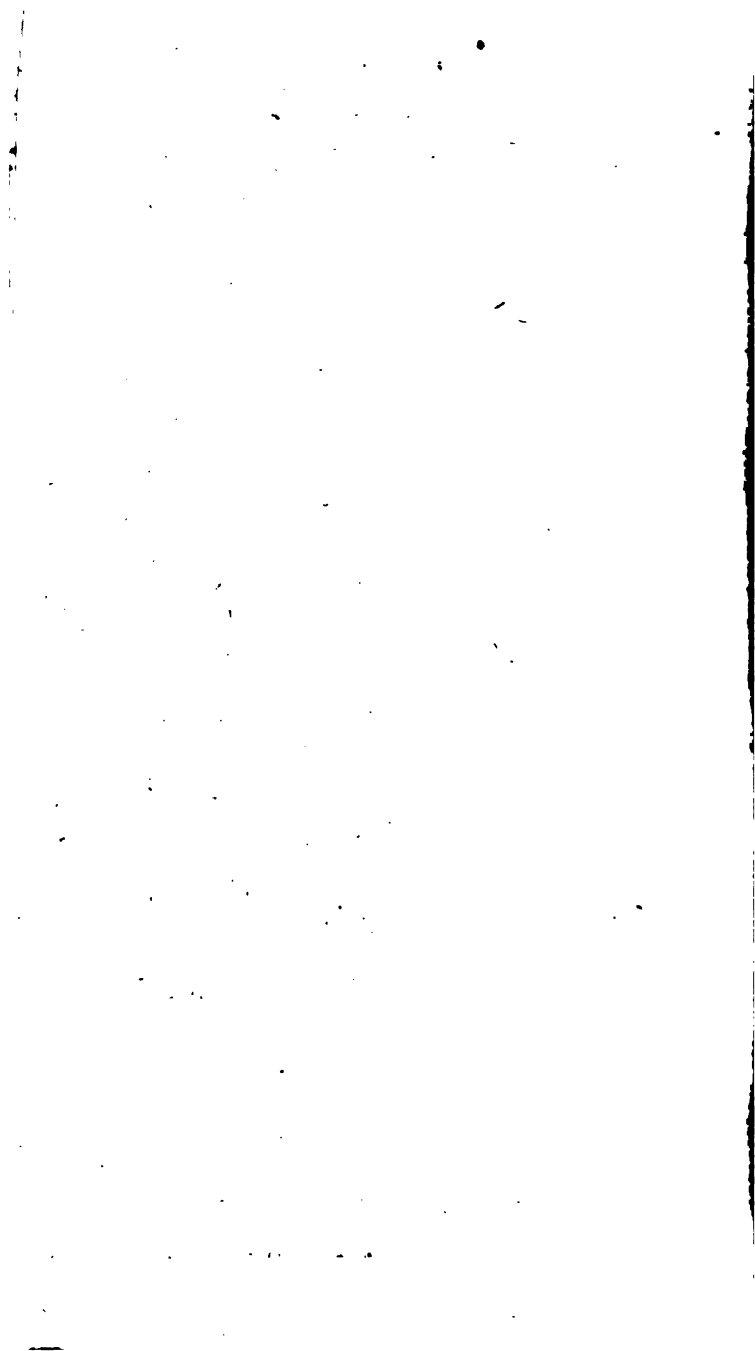
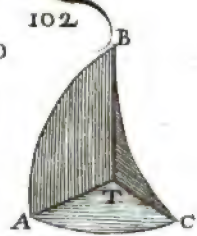
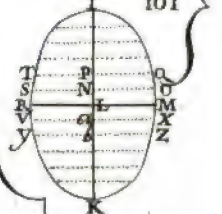
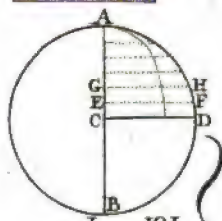
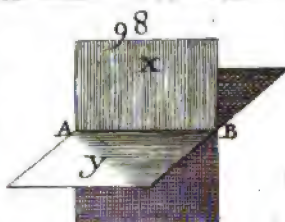
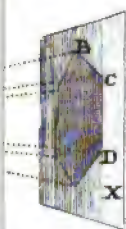
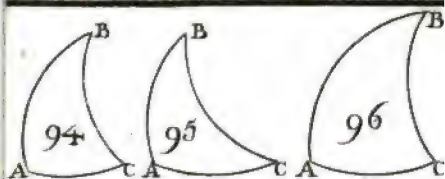
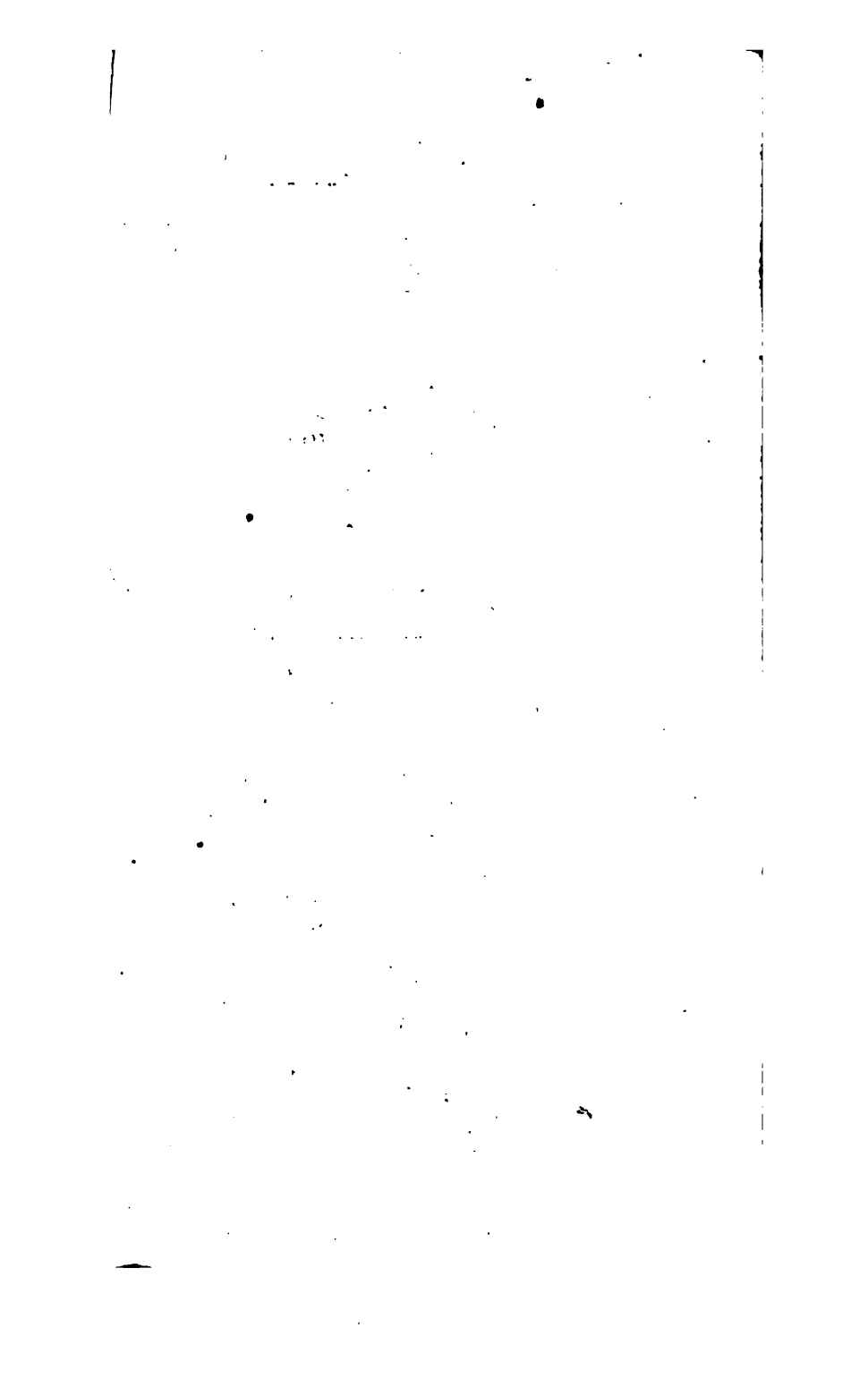
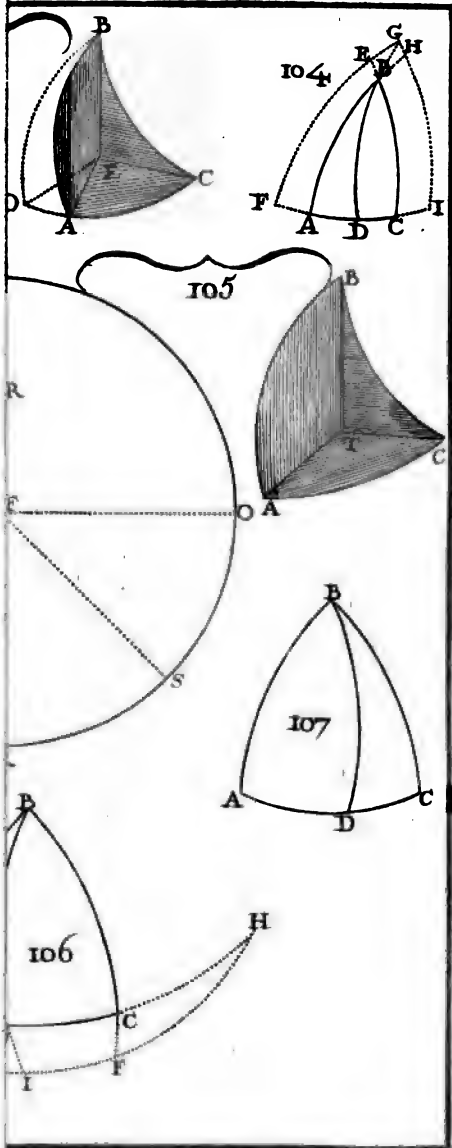


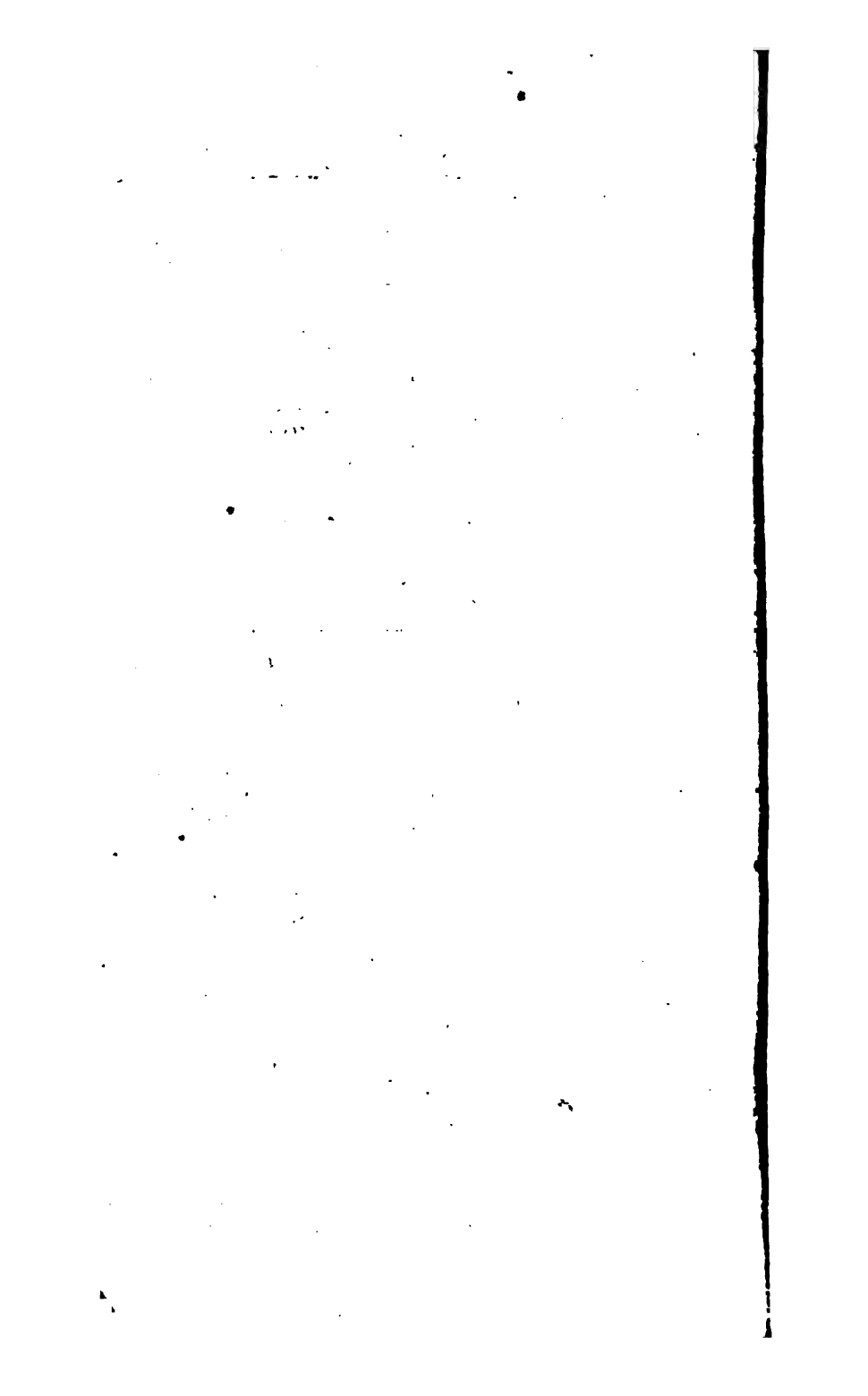
Planche X



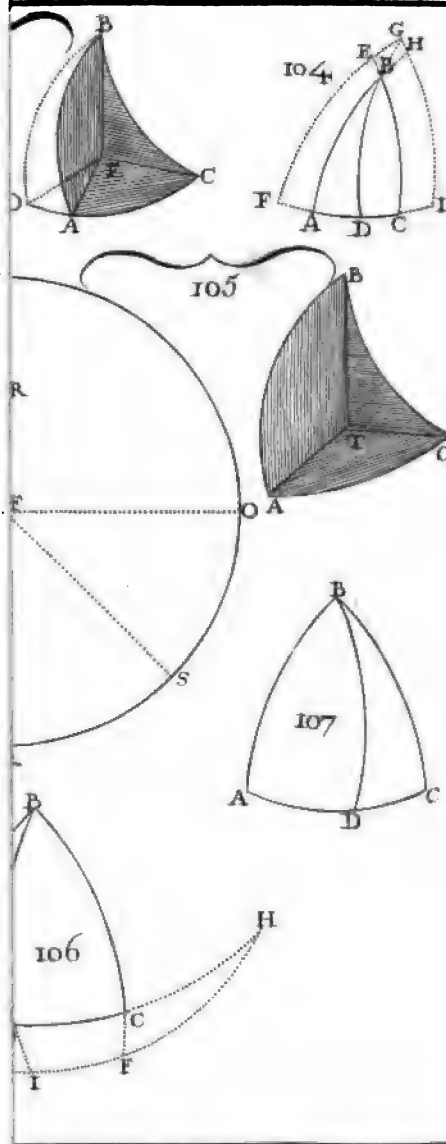


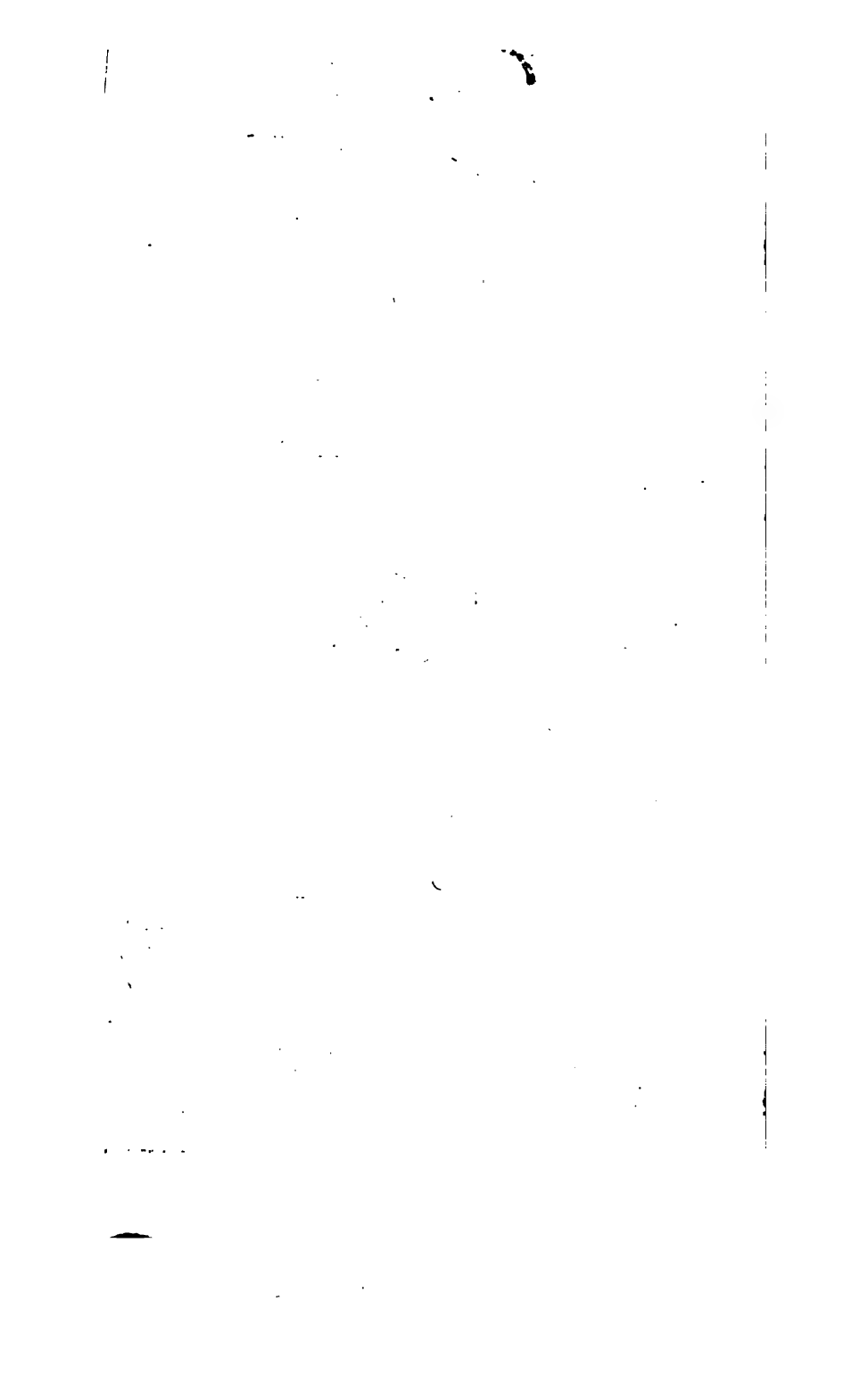
anche XI

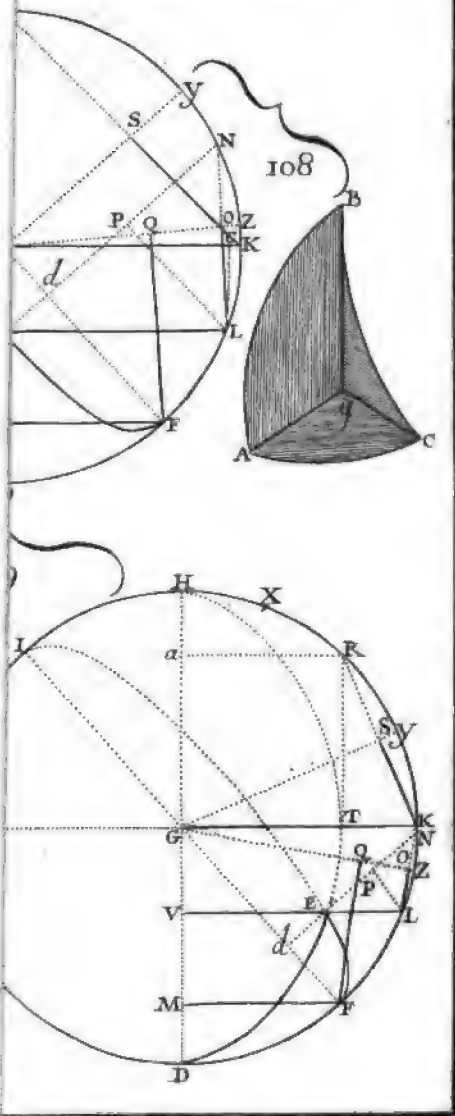


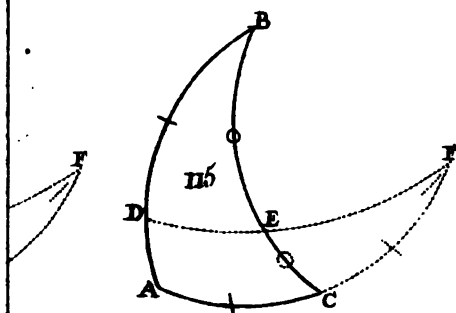
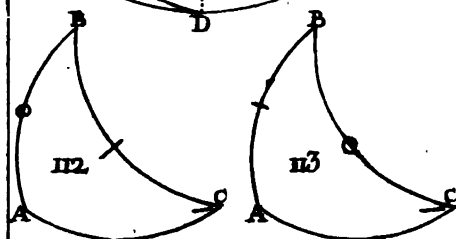
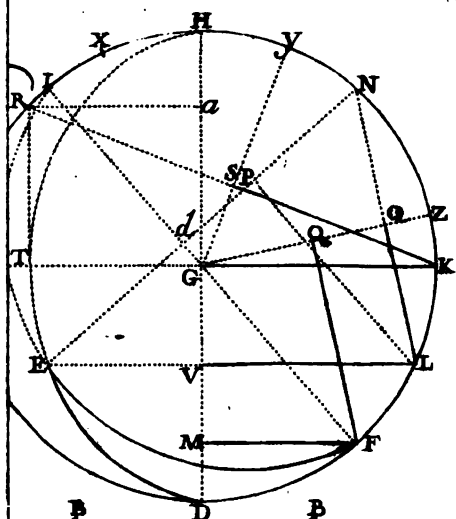


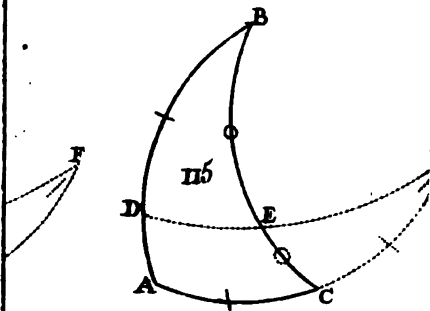
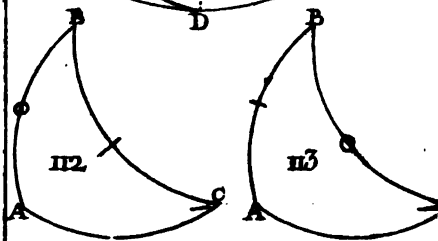
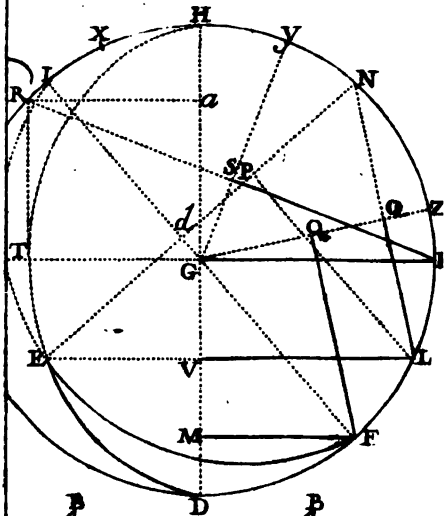
anche XI







lanche XIII

Cariche XIII

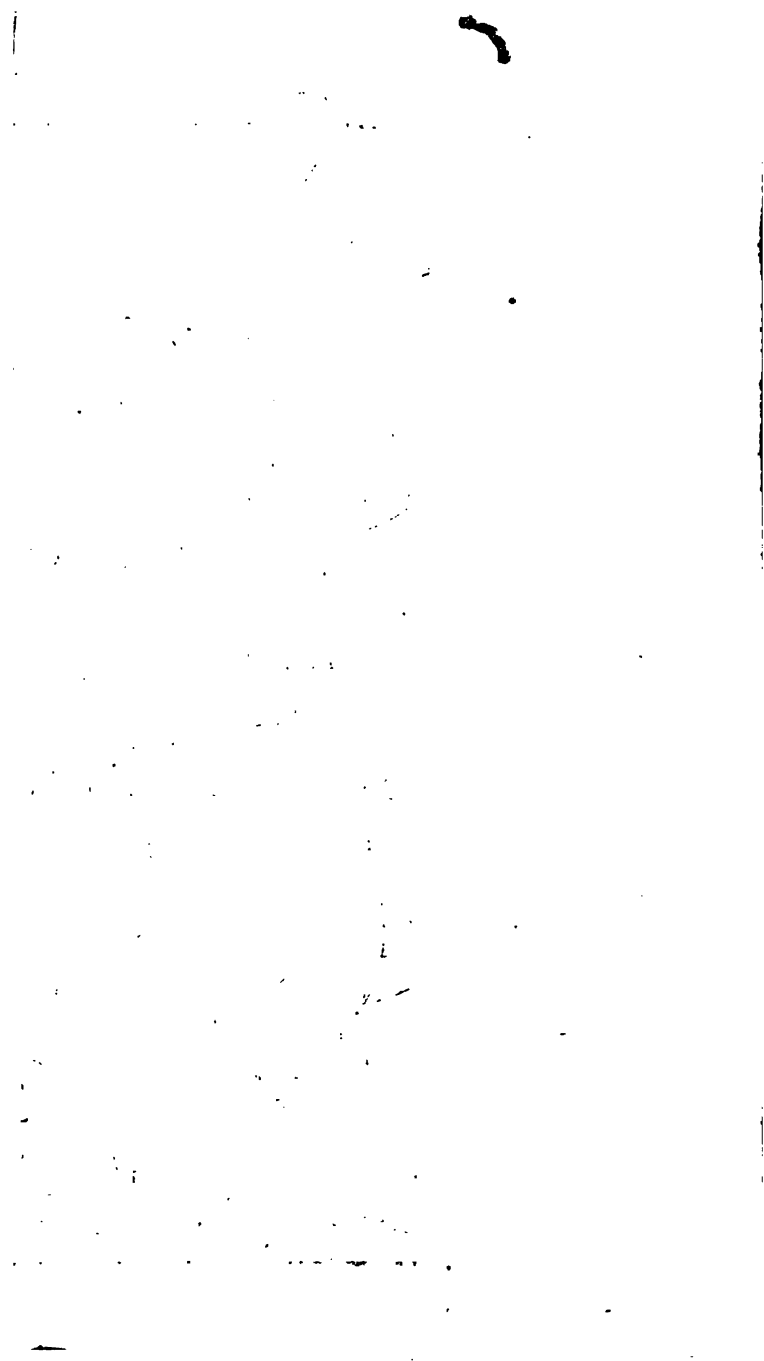


Planche XIV

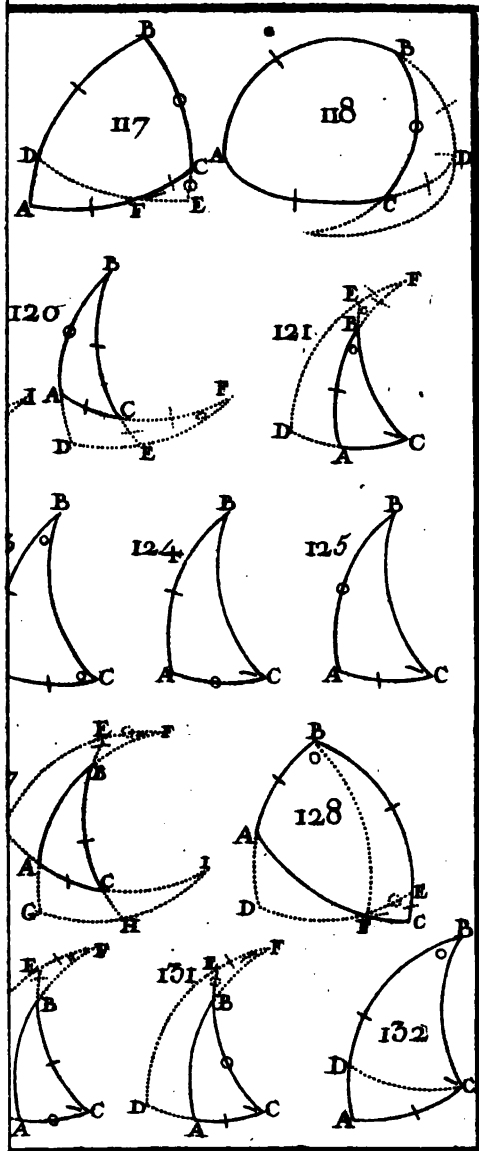
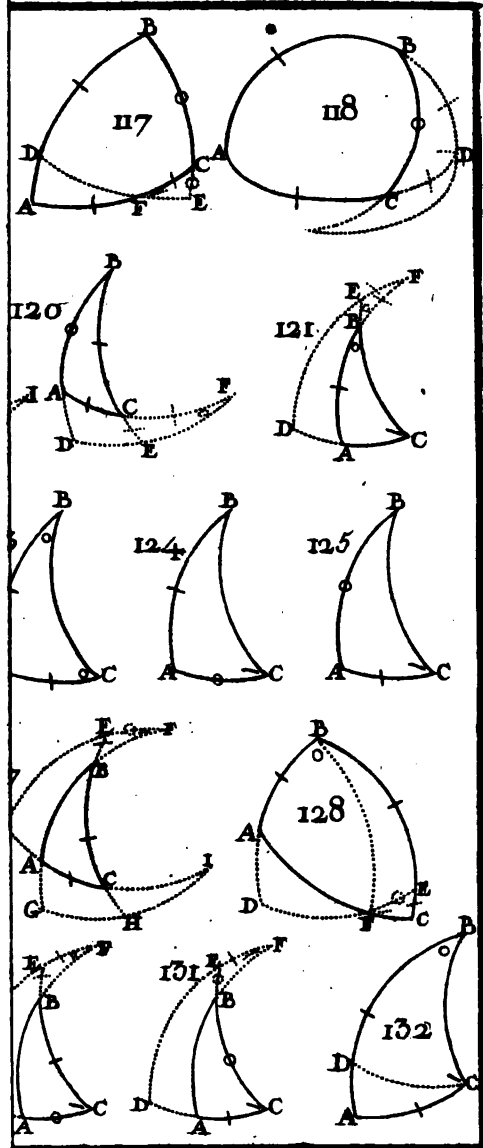




Planche XIV



1874

1875

1876

1877

1878

1879

1880

1881

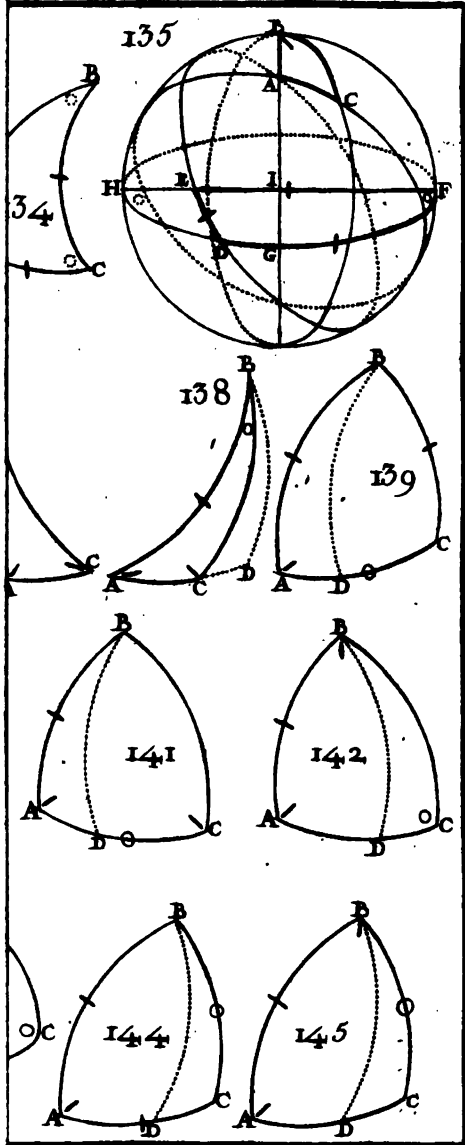
1882

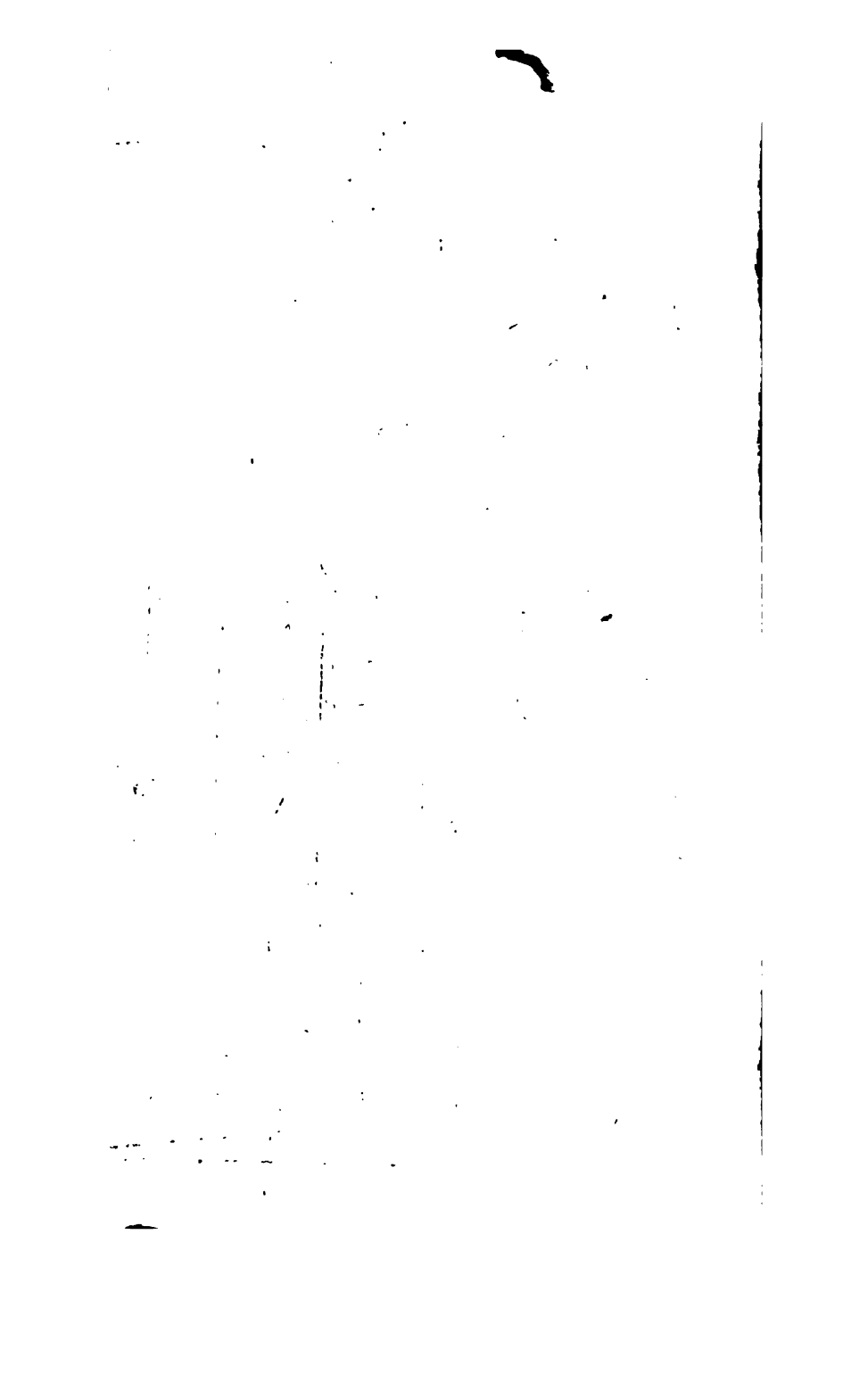
1883

1884

1885

nche XV





che XVI

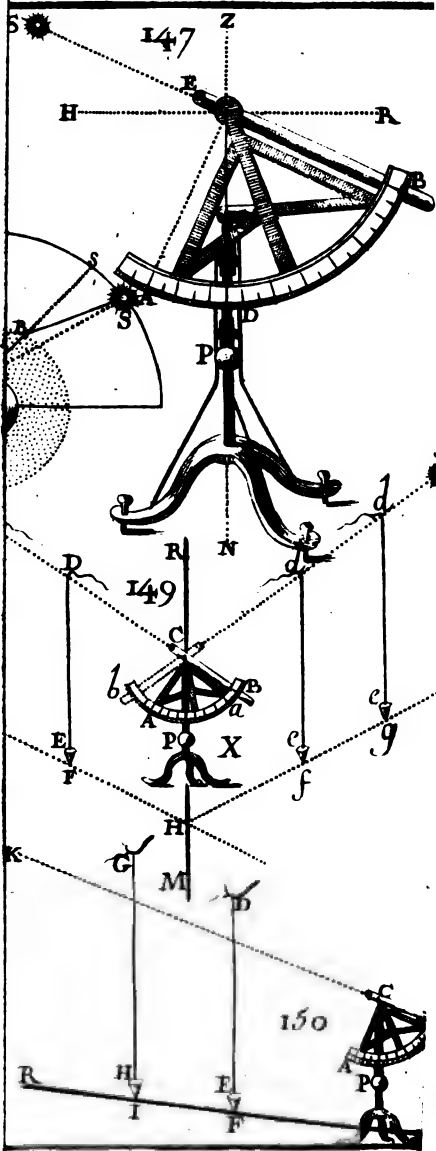
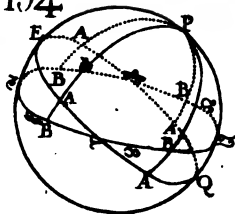
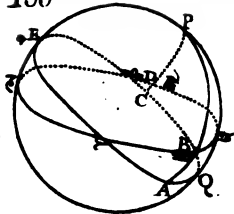


Planche XVII

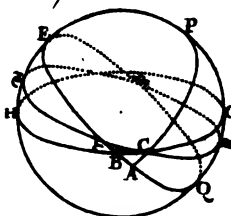
154



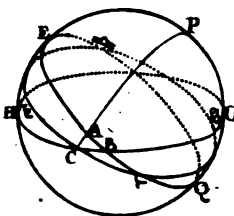
155



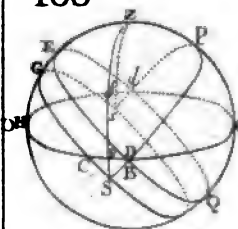
157



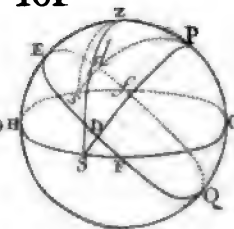
158



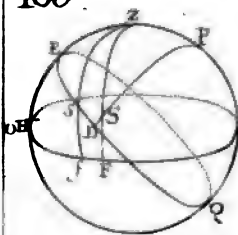
160



161



163



164

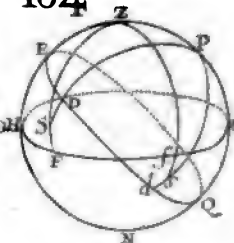
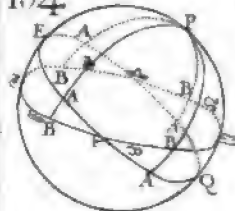
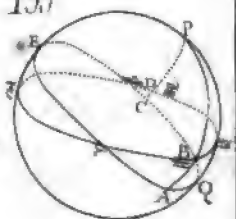


Planche XVII

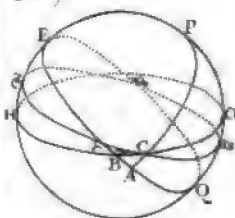
154



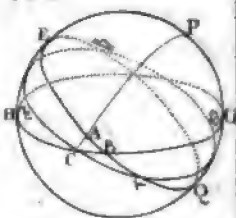
155



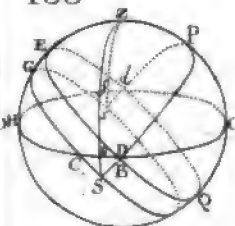
157



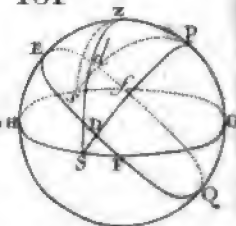
158



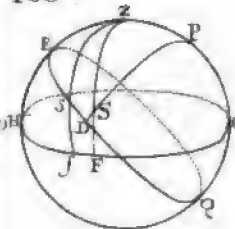
160



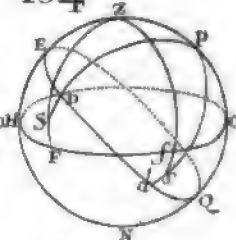
161



163



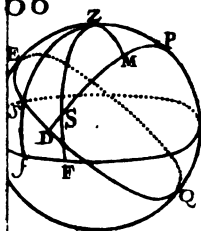
164



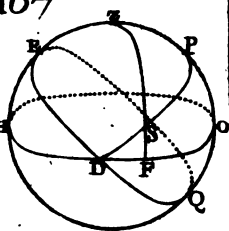


che XVIII

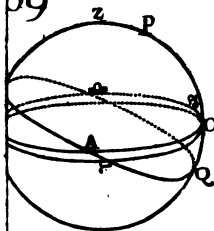
166



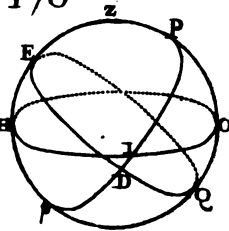
167



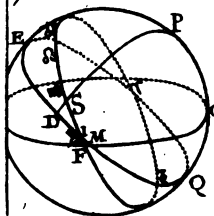
169



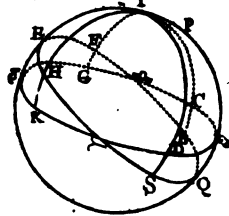
170



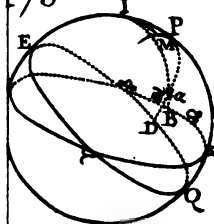
172



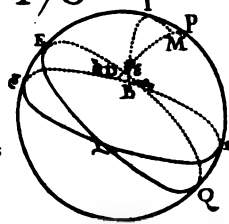
173



175



176





10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

23

24

25

26

27

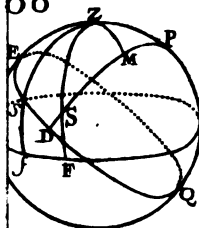
28

29

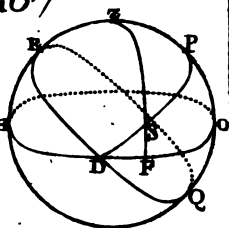
30

che XVIII

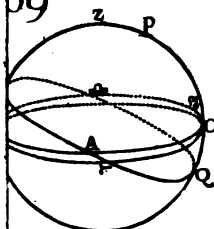
166



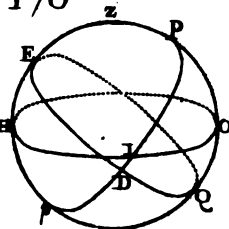
167



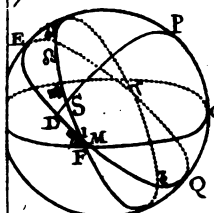
169



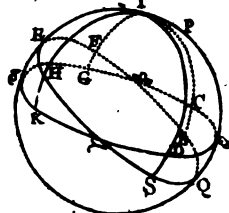
170



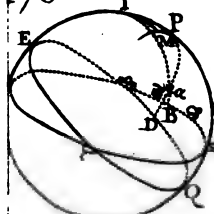
172



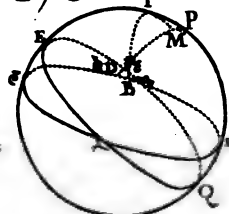
173

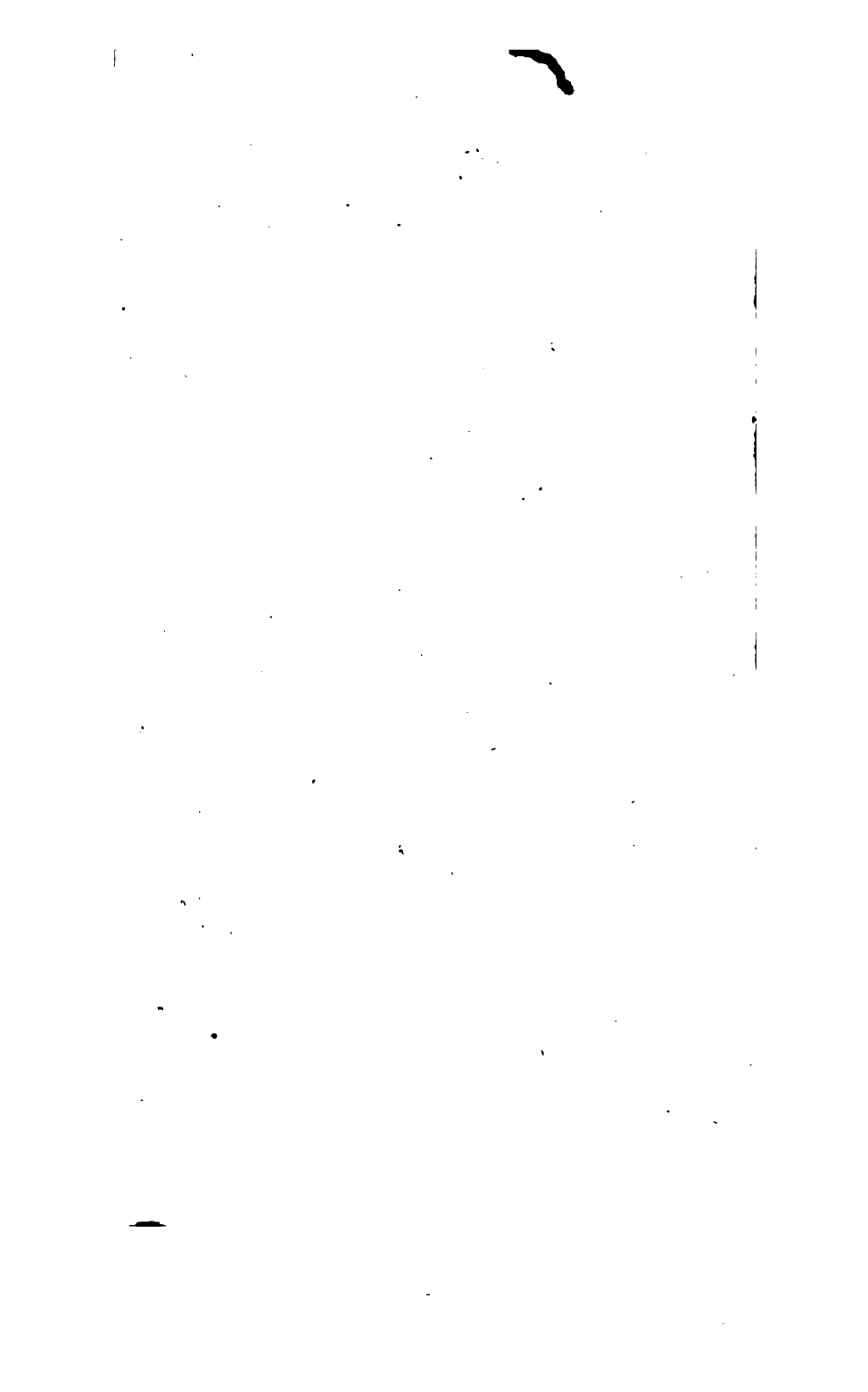


175



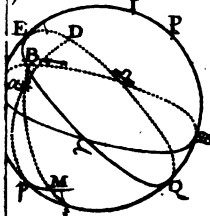
176



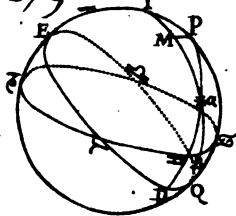


Manche XIX

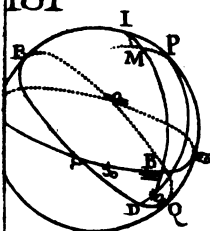
178



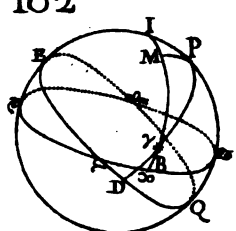
179



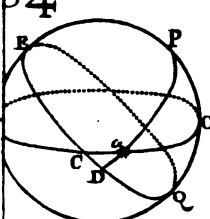
181



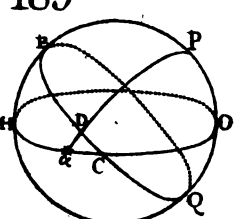
182



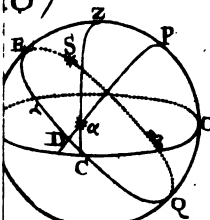
184



185



187



188

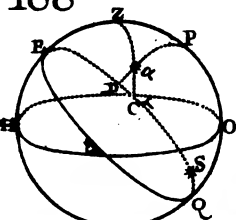
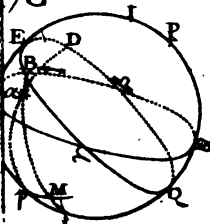


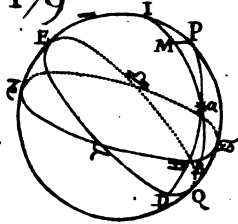


Planche XIX

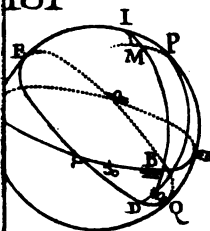
178



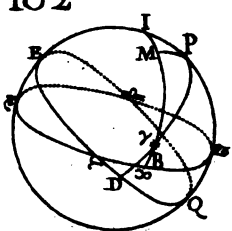
179



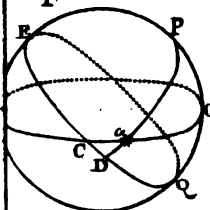
181



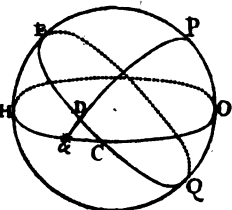
182



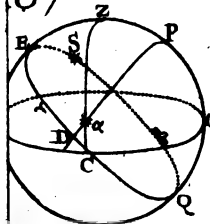
184



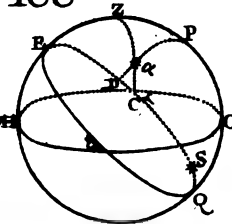
185



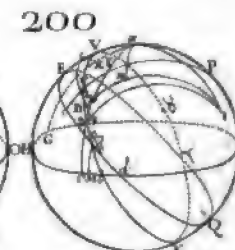
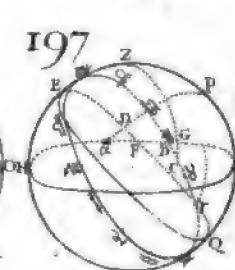
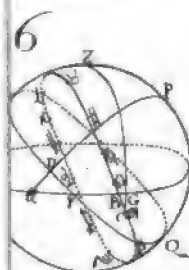
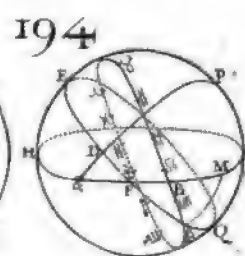
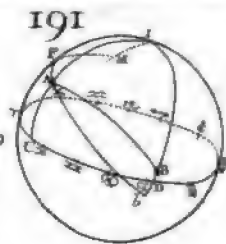
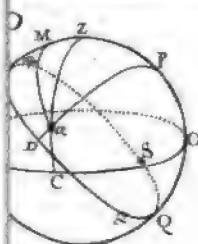
187



188







Live

20. Livre

Le chapitre I^{er}, en entier

20. Livre

Depuis la page 114 jusqu'à la 176^e

20

41